ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN
Band 39 Januar/Februar Heft 1/2

Aus gesundheitlichen Gründen hat der bisherige Herausgeber dieser Zeitschrift, Prof. Dr. Dr. h. c. F. A. Willers, seine Tätigkeit niederlegen müssen. Seinem Wunsche folgend habe ich nach Vereinbarung mit dem Akademie-Verlag Berlin und mit Zustimmung des übrigen Herausgeberkreises und der führenden Fachkollegen der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik mit Beginn des neuen Jahrganges die Geschäfte des Herausgebers und des Schriftleiters übernommen.

Ich glaube, mich zum Sprecher aller Leser und aller Mitarbeiter der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik zu machen, wenn ich zu Beginn meiner Tätigkeit Herrn Willers für seine aufopferungsvolle Arbeit und alle Sorgfalt, die er zweiundzwanzig Jahre lang, zunächst als Mitarbeiter von Trefftz und nach dessen Tode als sein Nachfolger, der Zeitschrift hat angedeihen lassen, den Dank ausspreche. Wenige Jahre, nachdem er 1937 die Schriftleitung übernommen hatte, stand er vor der schweren Aufgabe, die Zeitschrift auch während des Krieges erscheinen zu lassen, sie auf ihrem hohen Niveau zu halten und sie über den Krieg hinweg zu retten. Dies alles ist ihm in vorbildlicher Weise gelungen, und 1947 war die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik die erste mathematische Zeitschrift in Deutschland, die — von ihm zu neuem Leben erweckt — wieder erschien. Seiner umfassenden Sachkenntnis, der Leidenschaft, mit der er sich der Arbeit an „seiner" Zeitschrift hingab, und dem hohen Ansehen, das er bei den Fachgenossen im In- und Ausland genießt, ist es zu danken, wenn sich die Auflage seither fast verdoppelt hat und die „ZAMM" zu einem weltweiten Begriff geworden ist.

Als neuer Herausgeber sehe ich es als meine vornehmste Pflicht an, ihm nachzueifern, die Zeitschrift auf ihrer wissenschaftlichen Höhe zu halten, sie ebenso vielseitig zu gestalten und sie nach den Richtlinien zu leiten, die schon v. Mises bei ihrer Gründung aufgestellt hat und die auch heute noch ihre Gültigkeit haben. Ich bin mir bewußt, daß ich dazu der Mithilfe der Fachkollegen bedarf, und ich bitte alle Mitarbeiter und Leser um ihre tatkräftige Unterstützung.

Dresden, den 1. 1. 1959 H. Heinrich

ZAMM 39 (1959) Heft 1/2, Seite 2—8

Ein durch allgemeine Massenkräfte beanspruchtes unendliches elastisches Medium

Von *Václav Vodička*

Der folgende Aufsatz bringt die vollständige Lösung des Spannungsproblems für ein unendliches Medium, das durch beliebig verteilte Volumkräfte beansprucht wird. Der gelegentlich in der Literatur behandelte Sonderfall einer Einzellast erscheint im Rahmen unserer allgemeinen Theorie als eine ganz einfache Aufgabe.

The paper presents a complete solution of the stress distribution problem in case of an infinite medium strained by arbitrary volume forces. The special case of a single load, occasionally considered in the literature on the subject, appears as a very simple problem when treated from the point of view of our general theory.

L'article suivant donne une solution complète du problème des tensions pour un milieu infini qui est influencé par des forces de volume distribuées à volonté. Le cas spécial, traité de temps à temps dans la littérature, d'une charge unique apparaît dans le cadre de notre théorie générale comme un problème tout à fait simple.

В настоящей статье дается целное решение задачи о напряжении бесконечной среды подвергаемой произвельно распределенным пространственным силам. Частный случай сосредоточенной нагрузки, иногда встречающийся в передовой литературе, в рамках нашей общей теории оказывается совершенно простой задачей.

Das in der Literatur [1] zu findende zweidimensionale Analogon unseres jetzigen Problems gibt gar keine Vorstellung von der mathematischen Kompliziertheit des hier (so allgemein hoffentlich zum ersten Male) betrachteten dreidimensionalen Falles.

I. Allgemeines Problem

1. Es seien ϱ die spezifische Masse und μ die *Poisson*sche Zahl des homogenen und isotropen Materials, $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ die auf die Masseneinheit bezogenen Komponenten der Volumkräfte. Der dadurch bewirkte Spannungszustand beschreibt sich dann durch folgende drei Gleichgewichts- und ebensoviel Kompatibilitätsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \varrho X = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \varrho Y = 0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varrho Z = 0, \qquad -\infty < x, y, z < +\infty,\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] - 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] - 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y\,\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] - 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z\,\partial x} = 0,\\
&\qquad -\infty < x, y, z < +\infty
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Das Gleichungssystem (1) ist natürlich unter geläufigen Voraussetzungen über das Verschwinden der gesuchten Spannungskomponenten und ihrer Ableitungen im Unendlichen zu lösen. Dies geschieht durch Anwendung der dreidimensionalen *Fourier*-Transformation.

2. Die Beziehung zwischen einem bekannten Bedingungen unterworfenen Original $h(x, y, z) = F^{-1}[\bar{h}(\xi, \eta, \zeta)]$ und seiner *Fourier*-Transformierten $\bar{h}(\xi, \eta, \zeta) = F[h(x, y, z)]$ drückt sich durch

$$\left.\begin{aligned}
\bar{h}(\xi, \eta, \zeta) &= F[h(x, y, z)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z)\, e^{i(\xi x + \eta y + \zeta z)}\, dx\, dy\, dz\\
h(x, y, z) &= F^{-1}[\bar{h}(\xi, \eta, \zeta)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-i(\xi x + \eta y + \zeta z)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2)$$

aus. Dabei gilt das Faltungstheorem

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, \eta, \zeta)\, \bar{g}(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-i(\xi x + \eta y + \zeta z)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta, \gamma)\, g(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$
$$= \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)\, g(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \quad \ldots \quad (3)$$

und eine Reihe von (leicht zu beweisenden) Rechenregeln, worunter für weitere Zwecke vor allem die Formeln

$$F\left[\frac{\partial h(x, y, z)}{\partial x}\right] = -i\,\xi\, F[h(x, y, z)]\,, \quad F^{-1}\left[\frac{\partial \bar{h}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}\right] = i\,x\, F^{-1}[\bar{h}(\xi, \eta, \zeta)] \quad \ldots \quad (4)$$

(und die sich daraus durch zyklische Buchstabenvertauschung ergebenden) von Wichtigkeit sind. Es sei noch bemerkt, daß man sich bei der Berechnung der Integrale (2) auf *Cauchy*sche Hauptwerte beschränken kann.

3. Durch Anwendung der Transformation (2) auf (1) ergibt sich unter gegebenen Verhältnissen folgendes Gleichungssystem für die Transformierten $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \ldots$ der gesuchten Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi\,\bar{\sigma}_x + \eta\,\bar{\tau}_{xy} + \zeta\,\bar{\tau}_{xz} = -i\,\varrho\,\bar{X},\\
&\eta\,\bar{\sigma}_y + \xi\,\bar{\tau}_{xy} + \zeta\,\bar{\tau}_{yz} = -i\,\varrho\,\bar{Y},\\
&\zeta\,\bar{\sigma}_z + \xi\,\bar{\tau}_{xz} + \eta\,\bar{\tau}_{yz} = -i\,\varrho\,\bar{Z},\\
&(\mu\,\xi^2 - \eta^2)\,\bar{\sigma}_x + (-\xi^2 + \mu\,\eta^2)\,\bar{\sigma}_y + \mu\,(\xi^2 + \eta^2)\,\sigma_z + 2\,(1+\mu)\,\xi\,\eta\,\bar{\tau}_{xy} = 0\,,\\
&\mu\,(\eta^2 + \zeta^2)\,\bar{\sigma}_x + (\mu\,\eta^2 - \zeta^2)\,\bar{\sigma}_y + (-\eta^2 + \mu\,\zeta^2)\,\bar{\sigma}_z + 2\,(1+\mu)\,\eta\,\zeta\,\bar{\tau}_{yz} = 0\,,\\
&(\mu\,\xi^2 - \zeta^2)\,\bar{\sigma}_x + \mu\,(\xi^2 + \zeta^2)\,\bar{\sigma}_y + (-\xi^2 + \mu\,\zeta^2)\,\bar{\sigma}_z + 2\,(1+\mu)\,\xi\,\zeta\,\bar{\tau}_{xz} = 0
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad (5).$$

Bildet man nun mit ξ, η die Linearkombination der zwei ersten Gleichungen (5), so ergibt sich leicht unter Zuhilfenahme der dritten Beziehung (5) die erste Gleichung des neuen Systems

$$\left.\begin{aligned}
\xi^2\,\bar{\sigma}_x + \eta^2\,\bar{\sigma}_y - \zeta^2\,\bar{\sigma}_z + 2\,\xi\,\eta\,\bar{\tau}_{xy} &= -i\,\varrho\,(\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} - \zeta\,\bar{Z})\,,\\
-\xi^2\,\bar{\sigma}_x + \eta^2\,\bar{\sigma}_y + \zeta^2\,\bar{\sigma}_z + 2\,\eta\,\zeta\,\bar{\tau}_{yz} &= -i\,\varrho\,(-\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z})\,,\\
\xi^2\,\bar{\sigma}_x - \eta^2\,\bar{\sigma}_y + \zeta^2\,\bar{\sigma}_z + 2\,\zeta\,\xi\,\bar{\tau}_{xz} &= -i\,\varrho\,(\xi\,\bar{X} - \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z})
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad (5.1).$$

Durch Hinzufügung der drei letzten Gleichungen (5) kommt man so zum äquivalenten Ersatzsystem, woraus man leicht die Unbekannten $\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{zx}$ eliminieren kann. So kommt

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z - (1+\mu)\,\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\xi^2 + \eta^2}\,\bar{\sigma}_z &= -(1+\mu)\,i\,\varrho\,\frac{\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} - \zeta\,\bar{Z}}{\xi^2 + \eta^2}\,,\\
\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z - (1+\mu)\,\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\eta^2 + \zeta^2}\,\bar{\sigma}_x &= -(1+\mu)\,i\,\varrho\,\frac{-\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z}}{\eta^2 + \zeta^2}\,,\\
\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z - (1+\mu)\,\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\zeta^2 + \xi^2}\,\bar{\sigma}_y &= -(1+\mu)\,i\,\varrho\,\frac{\xi\,\bar{X} - \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z}}{\zeta^2 + \xi^2}
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad (6).$$

Nun sind aber die Gleichungen (6) äquivalent mit dem neuen System

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z - (1+\mu)\,\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\eta^2 + \zeta^2}\,\bar{\sigma}_x = -(1+\mu)\,i\,\varrho\,\frac{-\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z}}{\eta^2 + \zeta^2}\,,\\
&(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left(\frac{\bar{\sigma}_z}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\bar{\sigma}_x}{\eta^2 + \zeta^2}\right) = i\,\varrho\left(\frac{\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} - \zeta\,\bar{Z}}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{-\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z}}{\eta^2 + \zeta^2}\right),\\
&(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left(\frac{\bar{\sigma}_x}{\eta^2 + \zeta^2} - \frac{\bar{\sigma}_y}{\zeta^2 + \xi^2}\right) = i\,\varrho\left(\frac{-\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z}}{\eta^2 + \zeta^2} - \frac{\xi\,\bar{X} - \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z}}{\zeta^2 + \xi^2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad (7),$$

dessen zwei letzten Beziehungen zur Vermutung

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \frac{i\,\varrho}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\left[-\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z} + (\eta^2 + \zeta^2)\,\Phi\right],\\
\bar{\sigma}_y &= \frac{i\,\varrho}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\left[\xi\,\bar{X} - \eta\,\bar{Y} + \zeta\,\bar{Z} + (\zeta^2 + \xi^2)\,\Phi\right],\\
\bar{\sigma}_z &= \frac{i\,\varrho}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\left[\xi\,\bar{X} + \eta\,\bar{Y} - \zeta\,\bar{Z} + (\xi^2 + \eta^2)\,\Phi\right]
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad (8)$$

Anlaß geben. Geht man damit in die erste Gleichung (7) ein, so kommt

$$(1+\mu)\, i\,\varrho\, \frac{-\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}}{\eta^2+\zeta^2} = (1+\mu)\frac{i\,\varrho}{\eta^2+\zeta^2}\left[-\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z} + (\eta^2+\zeta^2)\,\Phi\right]$$
$$-\frac{i\,\varrho}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\left[\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z} + 2\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,\Phi\right]$$
$$= (1+\mu)\, i\,\varrho\, \frac{-\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}}{\eta^2+\zeta^2} - i\,\varrho\, \frac{\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} - (1-\mu)\, i\,\varrho\,\Phi\,.$$

Man hat also

$$\Phi = -\frac{1}{1-\mu}\cdot\frac{\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und die Formeln (8) erscheinen in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \frac{i\,\varrho}{(1-\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\left[-\left(2-\mu-\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\xi \bar{X}\right.\\
&\qquad\left.+\left(-\mu+\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)(\eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z})\right],\\
\bar{\sigma}_y &= \frac{i\,\varrho}{(1-\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\left[-\left(2-\mu-\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\eta \bar{Y}\right.\\
&\qquad\left.+\left(-\mu+\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)(\zeta \bar{Z} + \xi \bar{X})\right],\\
\bar{\sigma}_z &= \frac{i\,\varrho}{(1-\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\left[-\left(2-\mu-\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\zeta \bar{Z}\right.\\
&\qquad\left.+\left(-\mu+\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)(\xi \bar{X} + \eta \bar{Y})\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10).$$

Unter Zuhilfenahme von (8) und (9) ergibt sich schrittweise aus der zweiten Gleichung (5.1)

$$2\,\eta\,\zeta\,\bar{\tau}_{yz} = -i\,\varrho\,(-\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}) + \xi^2\,\bar{\sigma}_x - \eta^2\,\bar{\sigma}_y - \zeta^2\,\bar{\sigma}_z = -i\,\varrho\,(-\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z})$$
$$+\frac{i\,\varrho}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\{\xi^2(-\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z}) - \eta^2(\xi \bar{X} - \eta \bar{Y} + \zeta \bar{Z})$$
$$-\zeta^2(\xi \bar{X} + \eta \bar{Y} - \zeta \bar{Z}) + [\xi^2(\eta^2+\zeta^2) - \eta^2(\zeta^2+\xi^2) - \zeta^2(\xi^2+\eta^2)]\,\Phi\}$$
$$=\frac{i\,\varrho}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}(-2\,\eta^2\,\zeta\,\bar{Z} - 2\,\eta\,\zeta^2\,\bar{Y} - 2\,\eta^2\zeta^2\,\Phi) = -2\,i\,\varrho\,\eta\,\zeta\,\frac{\eta\,\zeta\,\Phi + \zeta\,\bar{Y} + \eta\,\bar{Z}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

und analoge Ausdrücke erhält man auch für $\bar{\tau}_{zx}$, $\bar{\tau}_{xy}$. Zusammenfassend hat man also

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\tau}_{yz} &= -i\,\varrho\,\frac{\eta\,\zeta\,\Phi + \zeta\,\bar{Y} + \eta\,\bar{Z}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad \bar{\tau}_{zx} = -i\,\varrho\,\frac{\zeta\,\bar{X} + \zeta\,\xi\,\Phi + \xi\,\bar{Z}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
\bar{\tau}_{xy} &= -i\,\varrho\,\frac{\eta\,\bar{X} + \xi\,\bar{Y} + \xi\,\eta\,\Phi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11),$$

wobei Φ durch (9) erklärt ist. Damit bekommt man endlich

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\tau}_{yz} &= \frac{i\,\varrho}{(1-\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\left[\frac{\xi\,\eta\,\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\bar{X} - \left(1-\mu-\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\zeta\,\bar{Y}\right.\\
&\qquad\left.-\left(1-\mu-\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\eta\,\bar{Z}\right],\\
\bar{\tau}_{zx} &= \frac{i\,\varrho}{(1-\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\left[\frac{\xi\,\eta\,\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\bar{Y} - \left(1-\mu-\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\xi\,\bar{Z}\right.\\
&\qquad\left.-\left(1-\mu-\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\zeta\,\bar{X}\right],\\
\bar{\tau}_{xy} &= \frac{i\,\varrho}{(1-\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\left[\frac{\xi\,\eta\,\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\bar{Z} - \left(1-\mu-\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\eta\,\bar{X}\right.\\
&\qquad\left.-\left(1-\mu-\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\xi\,\bar{Y}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (12).$$

Die Formeln (10) und (12) bestimmen die *Fourier*-Transformierten der unbekannten Spannungen und unsere Aufgabe besteht nun in der Auffindung der zugehörigen Originalfunktionen. Natürlich ist dies keineswegs leicht.

4. Um den Übergang von (10) und (12) zur gesuchten Lösung $\sigma_x, \sigma_y, \ldots$ vollführen zu können, brauchen wir die Originale zu folgenden *Fourier*-Transformierten:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{i\,\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \dfrac{i\,\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \dfrac{i\,\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \dfrac{i\,\xi^3}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},\ \dfrac{i\,\eta^3}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}, \\ \dfrac{i\,\zeta^3}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},\ \dfrac{i\,\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},\ \dfrac{i\,\xi\,\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},\ \dfrac{i\,\xi^2\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}, \\ \dfrac{i\,\xi\,\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},\ \dfrac{i\,\eta^2\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},\ \dfrac{i\,\eta\,\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},\ \dfrac{i\,\xi\,\eta\,\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}. \end{array}\right\} \quad (13)$$

Wegen der inneren Struktur der Transformation (2) und der augenscheinlichen Symmetrie der Ausdrücke (13) haben wir jedoch nur

$$F^{-1}\left[\frac{i\,\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right],\ F^{-1}\left[\frac{i\,\xi^3}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right],\ F^{-1}\left[\frac{i\,\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right],\ F^{-1}\left[\frac{i\,\xi\,\eta\,\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] \quad (13.1)$$

zu berechnen.

Zum Ausgangspunkt wählen wir den Wert des uneigentlichen Integrals

$$J = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\xi x+\eta y+\zeta z)}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14),$$

bei dessen Berechnung wir uns (wie schon bemerkt) auf die *Cauchy*schen Hauptwerte beschränken können. Damit fallen im folgenden manche mühsame Konvergenzbetrachtungen weg.

Zuerst hat man unter Benutzung von

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\,\eta)\cos\eta\,y\,d\eta = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda < |y| \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-y^2}} & \text{,, } \lambda > |y| \end{cases}$$

und der *Sommerfeld*schen Relation

$$\int_0^\infty \frac{\cos\zeta\,z}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\pi}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,e^{-|z|\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda\,J_0(\lambda\,\eta)}{\sqrt{\lambda^2+z^2}}\,e^{-|\xi|\sqrt{\lambda^2+z^2}}$$

für den gesuchten Wert von (14)

$$\begin{aligned} J &= 8\int_0^\infty \cos\xi\,x\,d\xi \int_0^\infty \cos\eta\,y\,d\eta \int_0^\infty \frac{\cos\zeta\,z}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,d\zeta \\ &= 4\,\pi\int_0^\infty \cos\xi\,x\,d\xi \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+z^2}}\,e^{-\xi\sqrt{\lambda^2+z^2}}\,d\lambda \int_0^\infty J_0(\lambda\,\eta)\cos\eta\,y\,d\eta \\ &= 4\,\pi\int_0^\infty \cos\xi\,x\,d\xi \int_{|y|}^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-y^2)(\lambda^2+z^2)}}\,e^{-\xi\sqrt{\lambda^2+z^2}}\,d\lambda\,. \end{aligned}$$

Führt man nun anstatt λ eine neue Integrationsvariable ω durch

$$\lambda^2+z^2 = (y^2+z^2)\,\mathrm{ch}^2\,\omega$$

ein, so findet man sofort

$$\int_{|y|}^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-y^2)(\lambda^2+z^2)}}\,e^{-\xi\sqrt{\lambda^2+z^2}}\,d\lambda = \int_0^\infty e^{-\xi\sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{ch}\,\omega}\,d\omega = K_0\left(\xi\sqrt{y^2+z^2}\right),$$

und es ergibt sich endlich

$$J = 4\pi \int_0^\infty K_0(\xi\sqrt{y^2+z^2}) \cos \xi x \, d\xi = \frac{2\pi^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Wir kommen so zum Ergebnis

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\xi x + \eta y + \zeta z)}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} d\xi \, d\eta \, d\zeta = \frac{2\pi^2}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \ldots\ldots \quad (14.1),$$

das sich mit Hilfe von einigen Soninschen Tatsachen aus der Theorie der Zylinderfunktionen sehr schön auch durch Verwendung von Polarkoordinaten gewinnen läßt.

Nach (2) kann man auch schreiben

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \ldots\ldots \quad (15),$$

woraus sich unter Anwendung von (4) die Ausdrücke (13.1) leicht berechnen lassen.

Für den ersten haben wir

$$F^{-1}\left[\frac{i\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right] = -\frac{\partial}{\partial x} F^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x}{r^3} \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)},$$

während die zwei nächstfolgenden durch Verwendung der Hilfsrelation

$$F^{-1}\left[\frac{i\xi^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] = \frac{1}{2} F^{-1}\left[\frac{i}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{i\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{i}{r} - i x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{i(y^2+z^2)}{r^3} \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

zu finden sind. Es ergibt sich dafür

$$\left.\begin{aligned} F^{-1}\left[\frac{i\xi^3}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2+z^2}{r^3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x(y^2+z^2)}{r^5} \\ F^{-1}\left[\frac{i\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2+z^2}{r^3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{y(-2x^2+y^2+z^2)}{r^5} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(c)}.$$

Um auch das letzte Original (13.1) zu bestimmen, haben wir zuerst

$$F^{-1}\left[\frac{i\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] = -\frac{1}{2} i y F^{-1}\left[\frac{i\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{ixy}{r^3}$$

und daraus mit Hilfe von (4)

$$F^{-1}\left[\frac{i\xi\eta\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] = i\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{ixy}{r^3}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{xyz}{r^5} \quad \ldots \quad \text{(d)}.$$

Als Endergebnis unserer Rechnungen schreiben wir in leicht verständlicher Weise

$$\left.\begin{aligned} &F^{-1}\left[\frac{i\xi, i\eta, i\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x, y, z}{r^3}, \\ &F^{-1}\left[\frac{i\xi^3, i\eta^3, i\zeta^3}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x(y^2+z^2), y(z^2+x^2), z(x^2+y^2)}{r^5}, \\ &F^{-1}\left[\frac{i\xi^2\eta, i\xi\eta^2, i\xi^2\zeta, \ldots}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] \\ &\quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{y(-2x^2+y^2+z^2), x(x^2-2y^2+z^2), z(-2x^2+y^2+z^2), \ldots}{r^5}, \\ &F^{-1}\left[\frac{i\xi\eta\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\right] = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{xyz}{r^5}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\} \quad (16).$$

5. Die bisherigen Ergebnisse machen es nun ganz leicht, die fertige Lösung unseres Problems aufzuschreiben. Nach (10), (12), (3) und (16) erhalten wir sofort

$$
\left.
\begin{aligned}
&8\pi\frac{1-\mu}{\varrho}\sigma_x = \\
&= -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)X(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\
&\quad+\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu-\frac{3\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)[\beta\,Y(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma) \\
&\qquad\qquad+\gamma\,Z(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,, \\
&8\pi\frac{1-\mu}{\varrho}\sigma_y = \\
&= -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)Y(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\
&\quad+\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu-\frac{3\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)[\gamma\,Z(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma) \\
&\qquad\qquad+\alpha\,X(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,, \\
&8\pi\frac{1-\mu}{\varrho}\sigma_z = \\
&= -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)Z(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\
&\quad+\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu-\frac{3\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)[\alpha\,X(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma) \\
&\qquad\qquad+\beta\,Y(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,, \\
&8\pi\frac{1-\mu}{\varrho}\tau_{yz} = -3\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\beta\gamma}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^5}X(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\
&\quad-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)Y(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\
&\quad-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)Z(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,, \\
&8\pi\frac{1-\mu}{\varrho}\tau_{zx} = -3\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\beta\gamma}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^5}Y(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\
&\quad-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)Z(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\
&\quad-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)X(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,,
\end{aligned}
\right\}\quad(17)
$$

$$\left.\begin{aligned} 8\pi\frac{1-\mu}{\varrho}\tau_{xy} = &-3\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\beta\gamma}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^5} Z(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ &-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right) X(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ &-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})^3}\left(1-2\mu+\frac{3\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right) Y(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \end{aligned}\right|$$

II. Der Spezialfall einer Einzellast

1. Der jetzt zu betrachtende einfache Spezialfall ist wahrscheinlich im wesentlichen alles, was aus dem nämlichen Fragenkomplex berechnet worden ist. Mitgemeint sind natürlich auch die daraus direkt ableitbaren Tatsachen von der Rolle, welche die Singularitäten in der mathematischen Theorie des elastischen Raumes spielen, worüber man sehr schöne Ausführungen in der Literatur finden kann [2].

2. Wir wenden unsere allgemeinen Formeln (17) auf den Fall an, wo die Belastung lediglich aus einer im Ursprung und zwar in der positiven Oz-Richtung wirkenden Kraft Q besteht. Man hat nur in (17)

$$X(x, y, z) = Y(x, y, z) = 0\,,\ Z(x, y, z) = \frac{Q}{\varrho}\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

einzusetzen und die durch

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta, \gamma)\,\delta(x-\alpha)\,\delta(y-\beta)\,\delta(z-\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma = f(x, y, z)$$

ausgedrückte Eigenschaft der Diracschen δ-Funktion zu benutzen, um auf das bekannte Ergebnis [2]

$$\left.\begin{aligned} &8\pi(1-\mu)\,\sigma_x = \frac{Q\,z}{r^3}\left(1-2\mu-\frac{3\,x^2}{r^2}\right),\quad 8\pi(1-\mu)\,\sigma_y = \frac{Q\,z}{r^3}\left(1-2\mu-\frac{3\,y^2}{r^2}\right), \\ &8\pi(1-\mu)\,\sigma_z = -\frac{Q\,z}{r^3}\left(1-2\mu+\frac{3\,z^2}{r^2}\right), \\ &8\pi(1-\mu)\,\tau_{yz} = -\frac{Q\,y}{r^3}\left(1-2\mu+\frac{3\,z^2}{r^2}\right),\quad 8\pi(1-\mu)\,\tau_{zx} = -\frac{Q\,x}{r^3}\left(1-2\mu+\frac{3\,z^2}{r^2}\right), \\ &8\pi(1-\mu)\,\tau_{xy} = -\frac{3\,Q\,x\,y\,z}{r^5}\,;\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

zu kommen.

Literatur

[1] J. N. Sneddon, Fourier Transforms (1951), S. 400, New York: McGraw-Hill Book Co.
[2] A. I. Lurje, Prostranstvennyje sadatschi teorii uprugosti (1955), S. 71 u. f., Moskau: Gittl.

Manuskripteingang: 20. 1. 1958

Anschrift: Dr. Václav Vodička, Pilsen (ČSR), Stalinstr. 52

Ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung von Matrizendifferentialgleichungen

Von *P. Bajcsay* und *V. Lovass-Nagy*

Die Formel für die Lösung einer linearen Matrizen-Differentialgleichung ist für die numerische Rechnung besonders bequem, wenn die kanonische Darstellung der Koeffizientenmatrix explizit bekannt ist. Diese Formel ist jedoch schwierig anzuwenden, wenn sich die Matrix nicht auf Diagonalform bringen läßt oder ihre kanonische Gestalt unbekannt ist. Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, ein konvergentes Iterationsverfahren anzugeben, das bei einer beliebigen Koeffizientenmatrix anwendbar ist. Dabei wird die gegebene Matrix in eine Summe aus einer Matrix $\mathfrak{A}$ *mit explizit bekannter kanonischer Darstellung und einer Matrix* $\mathfrak{B}$ *von möglichst kleiner Norm zerlegt. Die auf diese Weise erhaltene Lösung erscheint in einer nach den Rechtseigenvektoren von* $\mathfrak{A}$ *entwickelten Form.*

The formula for the solution of a system of linear differential equations is particularly suited to numerical computation if the canonical representation of the matrix of coefficients is known explicitly. If this is not the case, or if the matrix cannot be transformed to diagonal form, difficulties arise in the attempt to apply

the formula. The purpose of the present paper is to construct a convergent method of iteration that may be used with any matrix of coefficients. To this end the given matrix is presented as the sum of two matrices, $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, where $\mathfrak{A}$ is a matrix the canonical representation of which is known explicitly while $\mathfrak{B}$ is a square matrix with a norm as small as possible. The solution obtained in this way is a series expansion in terms of the right-handed eigenvectors of $\mathfrak{A}$.

La formule de solution d'une linéaire équation différentielle de matrice est spécialement convenable à la calculation numérique si la représentation canonique de la matrice des coefficients est connue de manière explicite. Si pourtant la matrice des coefficients n'est pas à transformer à une forme diagonale ou que la représentation canonique de la matrice des coefficients est inconnue, l'application de la formule de solution connue est difficile. Le but de l'article présent est la construction d'un procédé itératif et convergent qui est utilisable avec chaque matrice de coefficient. Le procédé présente la matrice de coefficients donnée comme somme d'une matrice $\mathfrak{A}$, dont la représentation canonique est connue de manière explicite, et d'une matrice carrée d'une norme la plus petite possible. De cette façon on obtient une solution qui apparait sous une forme développée après les vecteurs propres d' $\mathfrak{A}$ de côté droite.

Формула для решения линейного матричного лифференциального уравнения особенно удобна для численной обработки, если каноническое представление матрицы коэффициентов известно в явном видо. Однако применение этой формулы затруднительно, если приведение упомянутой матрицы к каноническому виду не удается или канонический вид матрицы нензвестный. Задачей настоящей работы является построение сходящегося итерационного метода, применимого для любого вида матрицы коэффициентов. Данная матрица коэффициентов при этом представляется в виде суммы матрицы $\mathfrak{A}$ с известной явной канонической формой и матрицы $\mathfrak{B}$ с по вожмости малой нормой. Получаемое здесь решение представляется в виде разложения относительно правых собственных векторов матрицы $\mathfrak{A}$.

Bekanntlich ist die Lösung der Differentialgleichung mit der konstanten Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}$

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{y} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{y} \quad \ldots \quad (1),$$

wenn sie die Anfangsbedingung $\mathfrak{y}(0) = \mathfrak{y}_0$ erfüllt

$$\mathfrak{y} = e^{\mathfrak{K}t}\,\mathfrak{y}_0 \quad \ldots \quad (1.1),$$

ferner ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{y} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{g}(t) \quad \ldots \quad (2),$$

wenn sie dieselben Anfangsbedingungen erfüllt:

$$\mathfrak{y} = e^{\mathfrak{K}t}\,\mathfrak{y}_0 + \int_0^t e^{\mathfrak{K}(t-\tau)}\,\mathfrak{g}(\tau)\,d\tau \quad \ldots \quad (2.1).$$

(Siehe beispielsweise [1], [2]). Die Formeln (1.1), bzw. (2.1) ergeben aber für das praktische Rechnen nur dann entsprechende Resultate, wenn die Transformation der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}$ in eine Diagonalmatrix bekannt ist. Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Ausarbeitung eines solchen Iterationsverfahrens, mit dem die Lösung der Differentialgleichungen (1) und (2) dadurch ermöglicht wird, daß sie in einer für das praktische Rechnen zweckmäßigen Gestalt dargestellt wird und zwar für eine beliebige Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}$. Denn im allgemeinen kann die Transformation der Lösungen der Formeln (1.1), bzw. (2.1) — im Falle einer beliebigen Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}$ — nicht so durchgeführt werden, daß an Stelle von Exponentialfunktionen mit Matrix-Argumenten nur solche mit Skalar-Argumenten stehen. Das folgende Iterationsverfahren dagegen stellt eine Reihe von solchen Formeln auf, mit denen die exakte Lösung in gewünschtem Maße angenähert werden kann, die zudem ausschließlich aus Funktionen mit Skalar-Argumenten aufgebaut sind, ohne jedoch die Kenntnis der Diagonaldarstellung der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}$ vorauszusetzen.

I. Teil. Lösung von Gleichung (1) durch Iteration

Offensichtlich kann die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}$ stets in der Form $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ dargestellt werden und zwar so, daß die diagonale Transformation von $\mathfrak{A}$ leicht durchführbar sei (z. B. je nachdem, welches technische Problem die zu lösende Matrizen-Differentialgleichung lieferte, kann $\mathfrak{A}$ als Diagonal-, zyklische, gleichmäßige Kontinuantenmatrix, usw. gewählt werden), während $\mathfrak{B}$ eine beliebige Matrix ist. Dadurch kann Gl. (1) umgewandelt werden:

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{y}\,; \qquad \mathfrak{y}(0) = \mathfrak{y}_0 \quad \ldots \quad (3).$$

Nun ist die folgende Reihe von Differentialgleichungen zu bilden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathfrak{y}_1 &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_1 &&; \quad \mathfrak{y}_1(0) = \mathfrak{y}_0,\\
\frac{d}{dt}\,\mathfrak{y}_2 &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{B}\,\mathfrak{y}_1 &&; \quad \mathfrak{y}_2(0) = \mathfrak{y}_0,\\
\frac{d}{dt}\,\mathfrak{y}_3 &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_3 + \mathfrak{B}\,\mathfrak{y}_2 &&; \quad \mathfrak{y}_3(0) = \mathfrak{y}_0,\\
&\dots\dots\dots && \quad \dots\dots\\
\frac{d}{dt}\,\mathfrak{y}_m &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_m + \mathfrak{B}\,\mathfrak{y}_{m-1} &&; \quad \mathfrak{y}_m(0) = \mathfrak{y}_0
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (4).$$

Es kann bewiesen werden, daß $\lim_{m\to\infty} \mathfrak{y}_m = e^{\mathfrak{A}t}\,\mathfrak{y}_0$. Sowohl beim Konvergenzbeweis des Verfahrens, als auch bei seiner Anwendung muß selbstverständlich darauf geachtet werden, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im allgemeinen nicht vertauschbare Matrizen sind!

Von den in (4) zusammengefaßten Differentialgleichungen kann unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (2) und (2.1) die m-te Lösung in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathfrak{y}_m = e^{\mathfrak{A}t}\,\mathfrak{y}_0 + \int_0^t e^{\mathfrak{A}(t-\tau)}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{y}_{m-1}(\tau)\,d\tau \quad \dots\dots\dots\dots (5).$$

Oder aber bei Einführung der Bezeichnung

$$\mathfrak{M}_m = e^{\mathfrak{A}t} + \int_0^t e^{\mathfrak{A}(t-\tau)}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{M}_{m-1}(\tau)\,d\tau \quad \dots\dots\dots\dots (6)$$

ist

$$\mathfrak{y}_m = \mathfrak{M}_m(t)\,\mathfrak{y}_0 \quad \dots\dots\dots\dots (5.1).$$

Nehmen wir nun an, daß $\mathfrak{A}$ n-ter Ordnung ist und in der Form

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\,\mathfrak{u}_\nu\,\mathfrak{v}_\nu^*$$

darstellbar ist, worin λ_ν die Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{u}_\nu$ bzw. $\mathfrak{v}_\nu^*$ dagegen die rechts- bzw. linksseitigen Eigenvektoren von $\mathfrak{A}$ bedeuten; $\mathfrak{v}_\mu^*\,\mathfrak{u}_\nu = \delta_{\mu\nu}$ [3]. Dann kann der gemäß Formel (6) bestimmte Wert $\mathfrak{M}_m$ folgendermaßen ermittelt werden[1]):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_m = \sum_{k_1=1}^{n} e^{\lambda_{k_1} t} \Big\{ & \mathfrak{u}_{k_1}\mathfrak{v}_{k_1}^* + \sum_{k_2=1}^{n} (\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2}) \int_0^t e^{(\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1})\tau}\,d\tau\;\mathfrak{u}_{k_1}\mathfrak{v}_{k_2}^* + \\
& + \sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n} (\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2})(\mathfrak{v}_{k_2}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_3}) \int_0^t e^{(\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1})\tau} \int_0^\tau e^{(\lambda_{k_3}-\lambda_{k_2})\tau}\,(d\tau)^2\;\mathfrak{u}_{k_1}\mathfrak{v}_{k_3}^* + \dots + \\
& + \sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n}\cdots\sum_{k_m=1}^{n} (\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2})(\mathfrak{v}_{k_2}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_3})\dots(\mathfrak{v}_{k_{m-1}}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_m}) \times \\
& \times \int_0^t e^{(\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1})\tau} \int_0^\tau e^{(\lambda_{k_3}-\lambda_{k_2})\tau} \dots \int_0^\tau e^{(\lambda_{k_m}-\lambda_{k_{m-1}})\tau}\,(d\tau)^{m-1}\cdot\mathfrak{u}_{k_1}\mathfrak{v}_{k_m}^* \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (6.1).$$

Mit (6.1) ist dann das Endresultat von (5.1)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{y}_m = \sum_{k_1=1}^{n} e^{\lambda_{k_1} t} \Big\{ & (\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{y}_0) + \sum_{k_2=1}^{n} (\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2})(\mathfrak{v}_{k_2}^*\,\mathfrak{y}_0) \int_0^t e^{(\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1})\tau}\,d\tau + \\
& + \sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n} (\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2})(\mathfrak{v}_{k_2}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_3})(\mathfrak{v}_{k_3}^*\,\mathfrak{y}_0) \int_0^t e^{(\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1})\tau} \int_0^\tau e^{(\lambda_{k_3}-\lambda_{k_2})\tau}\,(d\tau)^2 + \dots + \\
& + \sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n}\cdots\sum_{k_m=1}^{n} (\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2})(\mathfrak{v}_{k_2}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_3})\dots(\mathfrak{v}_{k_{m-1}}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_m})(\mathfrak{v}_{k_m}^*\,\mathfrak{y}_0) \times \\
& \times \int_0^t e^{(\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1})\tau} \int_0^\tau e^{(\lambda_{k_3}-\lambda_{k_2})\tau} \dots \int_0^\tau e^{(\lambda_{k_m}-\lambda_{k_{m-1}})\tau}\,(d\tau)^{m-1} \Big\}\,\mathfrak{u}_{k_1}
\end{aligned}\right\} \quad (5.2).$$

Diese Darstellung des Resultats in (5.2) bietet offenbar zwei Vorteile:

[1]) Im Sonderfall, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind, d. h. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ also (siehe [4], Seite 96) $\mathfrak{u}_\nu\,\mathfrak{v}_\nu^*\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_\nu\,\mathfrak{v}_\nu^*$, nimmt (6.1) folgende Form an:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_m &= \sum_{k_1=1}^{n} e^{\lambda_{k_1} t}\,\mathfrak{u}_{k_1}\mathfrak{v}_{k_1}^* \left\{ \mathfrak{E} + \mathfrak{B}\int_0^t d\tau + \mathfrak{B}^2 \int_0^t\int_0^\tau (d\tau)^2 + \dots + \mathfrak{B}^{m-1} \int_0\int_0^\tau \dots \int_0^\tau (d\tau)^{m-1} \right\} = \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} e^{\lambda_{k_1} t}\,\mathfrak{u}_{k_1}\mathfrak{v}_{k_1}^* \left\{ \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{B}\,t}{1\,!} + \frac{\mathfrak{B}^2 t^2}{2\,!} + \dots + \frac{\mathfrak{B}^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)\,!} \right\} = e^{\mathfrak{A}t} \left\{ \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{B}\,t}{1!} + \frac{\mathfrak{B}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathfrak{B}^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} \right\},
\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, daß

$$\mathfrak{u}_{k_1}(\mathfrak{v}_{k_1}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2})(\mathfrak{v}_{k_2}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_3})\cdots(\mathfrak{v}_{k_{\nu-1}}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_\nu})\,\mathfrak{v}_{k_\nu}^* = \mathfrak{B}^{\nu-1}\,\mathfrak{u}_{k_1}(\mathfrak{v}_{k_1}\mathfrak{u}_{k_2}^*)(\mathfrak{v}_{k_2}^*\mathfrak{u}_{k_3})\cdots(\mathfrak{v}_{k_{\nu-1}}^*\mathfrak{u}_{k_\nu})\,\mathfrak{v}_{k_\nu}^* = \mathfrak{B}^{\nu-1}\,\mathfrak{u}_{k_1}\mathfrak{v}_{k_1}^*.$$

Erstens: da die in der Formel vorkommenden Produkte $(\mathfrak{v}^*_{k_\mu}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_\nu})$ und $(\mathfrak{v}^*_{k_\nu}\,\mathfrak{y}_0)$ skalare Werte sind, kann auch in dem Falle, daß $\mathfrak{B}$ nicht in eine diagonale Form transformierbar ist, eine solche Lösungsformel gefunden werden, in der nur Funktionen mit skalaren Argumenten vorhanden sind.

Zweitens: die Spaltenmatrix $\mathfrak{y}_m$ kann in die Komponenten der rechtsseitigen Eigenvektoren $\mathfrak{u}_\nu$ der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ aufgelöst und so dargestellt werden; die Darstellung in dieser Form kann auch als Verallgemeinerung der in der theoretischen Elektrotechnik allgemein gebräuchlichen „Methode der symmetrischen Komponenten" aufgefaßt werden.

Die durch Formel (5.2) gewonnene Spaltenmatrix $\mathfrak{y}_m$ kann als die Näherung $(m-1)$-ter Ordnung der Lösung (1.1) der Matrizen-Differentialgleichung (1) betrachtet werden. Auf Grund des im III. Teil abgeleiteten Konvergenzbeweises ist festzustellen, daß die ersten m-Glieder der unendlichen Potenzreihe der in (6.1) dargestellten Matrix $\mathfrak{M}_m(t)$ eigentlich identisch sind mit dem Taylor-Polynom $(m-1)$-ten Grades der Matrizenfunktion $e^{\mathfrak{K}t}$.

Zur Abschätzung des Fehlers zwischen der genauen Lösung der Differentialgleichung (1) und der in (5.2) angegebenen Näherung kann das folgende Verfahren abgeleitet werden:

Es sei

$$|\mathfrak{v}^*_{k_\mu}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_\nu}| \leqq \alpha$$

und

$$|\mathfrak{v}^*_{k_\nu}\,\mathfrak{y}_0| \leqq \beta$$

ferner im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq \tau \leqq t \leqq a$

$$e^{(\lambda_{k_\nu}-\lambda_{k_\mu})\,t} \leqq b$$

und

$$|u_{k_1\,i}\,e^{\lambda_{k_1}t}| \leqq c\,,$$

dann ist[2])

$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_m| = \left|\sum_{k_1=1}^{n} e^{\lambda_{k_1}t}\,\mathfrak{u}_{k_1}\left\{\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n}\cdots\sum_{k_{m+1}=1}^{n}(\mathfrak{v}^*_{k_1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_2})\cdots(\mathfrak{v}^*_{k_m}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}_{k_{m+1}})\,(\mathfrak{v}^*_{k_{m+1}}\,\mathfrak{y}_0)\,\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_0^t e^{(\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1})\,\tau}\cdots\int_0^\tau e^{(\lambda_{k_{m+1}}-\lambda_{k_m})\,\tau}\,(d\tau)^m+\cdots\right\}\right| \leqq \sqrt{n}\,c\,\beta\sqrt{\left\{\left(\frac{(n\,a\,b\,\alpha)^m}{m!}\right)^2+\left(\frac{(n\,a\,b\,\alpha)^{m+1}}{(m+1)!}\right)^2+\cdots\right\}} <$$

$$< \sqrt{n}\,c\,\beta\,\frac{(n\,a\,b\,\alpha)^m}{m!}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n\,a\,b\,\alpha}{m}\right)^2}} = \sqrt{n}\,c\,\beta\,\frac{(n\,a\,b\,\alpha)^m}{m!}\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2-(n\,a\,b\,\alpha)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5.3),$$

vorausgesetzt, daß m genügend groß ist, damit $m > n\,a\,b\,\alpha$.

II. Teil. Lösung von Gleichung (2) durch Iteration

Die inhomogene Gleichung (2) kann ähnlich der Umwandlung der homogenen Differentialgleichung (1) in (3) auch so ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{g}(t)\,; \qquad \mathfrak{y}(0) = \mathfrak{y}_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

worin die Transformation von $\mathfrak{A}$ in eine Diagonalmatrix bekannt ist, $\mathfrak{B}$ dagegen eine beliebige Matrix bedeutet. Bei Beachtung des im I. Teil Erwähnten ist die Näherung $(m-1)$-ter Ordnung der Lösung der Differentialgleichung (7):

$$\mathfrak{y}_m = \mathfrak{M}_m(t)\,\mathfrak{y}_0 + \int_0^t \mathfrak{M}_m(t-\tau)\,\mathfrak{g}(\tau)\,d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.1)$$

Zur Abschätzung des Fehlers zwischen der genauen Lösung der Differentialgleichung (2) und der in (7.1) angeführten Näherung kann das folgende Verfahren durchgeführt werden:

Es seien folgende Bezeichnungen gewählt:

Die exakte Lösung der Differentialgleichung (2) ist gemäß Punkt (2.1): $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_h + \mathfrak{y}_p$, worin $\mathfrak{y}_h$ die in (1.1) angeführte Lösung der homogenen Gleichung (1) und $\mathfrak{y}_p$ die Partikularlösung der inhomogenen Gleichung (2) bedeuten;

die näherungsweise Lösung der Differentialgleichung (2) ist gemäß (7.1): $\mathfrak{y}_m = \mathfrak{y}_{m\,h} + \mathfrak{y}_{m\,p}$, worin $\mathfrak{y}_{m\,h}$ die in Punkt (5.2) ausgedrückte näherungsweise Lösung der Differentialgleichung (1) und $\mathfrak{y}_{m\,p}$ die durch Iteration gewonnene Partikularlösung von (2) darstellen;

---

[2]) Ist $\mathfrak{x} = [x_i]$, dann ist $|\mathfrak{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

es sei

$$|\mathfrak{v}_{k_\mu}^* \mathfrak{B}\, \mathfrak{u}_{k_\nu}| \leqq \alpha$$

und

$$|\mathfrak{v}_{k_\nu}^* \mathfrak{y}_0| \leqq \beta,$$

ferner im geschlossenen Intervall $0 \leqq \tau \leqq t \leqq a$

$$e^{(\lambda_{k_\nu} - \lambda_{k_\mu})t} \leqq b$$

und

$$\left|u_{k_1 i}\, e^{\lambda_{k_1} t}\right| \leqq c,$$

außerdem

$$|\mathfrak{v}_{k_\nu}^* \mathfrak{g}(t)| \leqq \gamma$$

und

$$\left|u_{k_1 i}\, e^{\lambda_{k_1}(t-\tau)}\right| \leqq d;$$

dann ist

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_m| = |\mathfrak{y}_h - \mathfrak{y}_{mh} + \mathfrak{y}_p - \mathfrak{y}_{mp}| \leqq |\mathfrak{y}_h - \mathfrak{y}_{mh}| + |\mathfrak{y}_p - \mathfrak{y}_{mp}| = R_h + R_p \quad . \; . \; (7.2),$$

worin eine obere Grenze für R_h laut Formel (5.3) folgendermaßen gewonnen wird:

$$R_h < \sqrt{n}\, c\, \beta \frac{(n\, a\, b\, \alpha)^m}{m!} \frac{m}{\sqrt{m^2 - (n\, a\, b\, \alpha)^2}}; \qquad (m > n\, a\, b\, \alpha).$$

$$R_p = |\mathfrak{y}_p - \mathfrak{y}_{mp}| =$$

$$= \left| \int_0^t \sum_{k_1=1}^n e^{\lambda_{k_1}(t-\tau)} u_{k_1} \left\{ \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_{m+1}=1}^n (\mathfrak{v}_{k_1}^* \mathfrak{B}\, \mathfrak{u}_{k_2}) \cdots (\mathfrak{v}_{k_m}^* \mathfrak{B}\, \mathfrak{u}_{k_{m+1}}) (\mathfrak{v}_{k_{m+1}}^* \mathfrak{g}(\tau)) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_0^{t-\tau} e^{(\lambda_{k_2} - \lambda_{k_1})\tau} \cdots \int_0^{\tau} e^{(\lambda_{k_{m+1}} - \lambda_{k_m})\tau} (d\tau)^m + \cdots \right\} d\tau \right| \leqq \sqrt{n}\, d\, \gamma\, a \sqrt{\left\{ \left(\frac{(n\, a\, b\, \alpha)^m}{m!}\right)^2 + \left(\frac{(n\, a\, b\, \alpha)^{m+1}}{(m+1)!}\right)^2 + \cdots \right\}} <$$

$$< \sqrt{n}\, d\, \gamma\, a \frac{(n a b \alpha)^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n a b \alpha}{m}\right)^2}} = \sqrt{n}\, d\, \gamma\, a \frac{(n a b \alpha)^m}{m!} \frac{m}{\sqrt{m^2 - (n a b \alpha)^2}}; \; (m > n a b \alpha) \; . \; . \; . \; . \; (7.3).$$

Unter Berücksichtigung von (5.3) und (7.3) wird das Resultat für (7.2) schließlich:

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_m| < \sqrt{n} \frac{(n\, a\, b\, \alpha)^m}{m!} \frac{m}{\sqrt{m^2 - (n\, a\, b\, \alpha)^2}} (c\, \beta + d\, \gamma\, a); \qquad (m > n\, a\, b\, \alpha).$$

III. Teil. Konvergenzbeweis des Verfahrens

Aus den Fehlerabschätzungen (5.3) und (7.4) ist unmittelbar ersichtlich, daß der Absolutwert der Abweichung zwischen den exakten Lösungen der Gleichungen (1) bzw. (2) und den Näherungslösungen (5.2) bzw. (7.1) gegen Null konvergiert, wenn die Zahl der Iterationen $m \to \infty$ ist.

Ersetzt man andererseits in der Formel (6) die Matrizenfunktionen $e^{\mathfrak{A}t}$ und $e^{\mathfrak{A}(t-\tau)}$ durch ihre unendliche Taylorreihe (wobei beachtet werden muß, daß im allgemeinen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht vertauschbar sind)[3]), so gilt

$$\mathfrak{M}_m(t) = \mathfrak{E} + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\, t + \frac{1}{2!} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2 t^2 + \frac{1}{3!} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^3 t^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{m-1} t^{m-1} + \mathfrak{R}_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8),$$

worin $\mathfrak{R}_m$ die folgende unendliche Matrizen-Potenzreihe bedeutet:

$$\mathfrak{R}_m = \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{H}^\nu t^\nu;$$

hierin bedeutet die Matrix $\mathfrak{H}^\nu$ nichts anderes als die Summe derjenigen Glieder in der Entwicklung der Potenz $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\nu$, in denen $\mathfrak{B}$ höchstens $(m-1)$-mal als Koeffizient vorkommt (die Zahl dieser Glieder ist: $\sum_{k=0}^{m-1} \binom{\nu}{k}$). Offensichtlich stimmen die ersten m Glieder des in (8) auftretenden Ausdruckes $\mathfrak{M}_m(t)$ mit dem Taylor-Polynom $(m-1)$-ten Grades der Matrizenfunktion $e^{\mathfrak{K}t} = e^{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}$

[3]) Also ist beispielsweise $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2$.

überein, in jedem von t abhängigen Glied ν-ten Grades ($\nu \geqq m$) von $\mathfrak{R}_m$ ist der Matrizenkoeffizient von

$$\frac{t^\nu}{\nu!}$$

identisch mit den ersten $\sum_{m-1}^{k=0} \binom{\nu}{k}$ Gliedern der Entwicklung von $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\nu$. Die Richtigkeit dieser Feststellung leuchtet durch vollständige Induktion leicht ein. Überschreitet also die Zahl der Iterationen alle Grenzen ($m \to \infty$), gilt tatsächlich

$$\mathfrak{M}_m(t) \to e^{\mathfrak{R} t} = e^{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) t},$$

was eingangs behauptet worden war.

Literatur

[1] R. Zurmühl, Matrizen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950: Springer-Verlag.
[2] W. Schmeidler, Vorträge über Determinanten und Matrizen. Berlin 1949: Akademie-Verlag.
[3] E. Egerváry, On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, Tomus XV., Fasc. 1., p. 1. 1953.
[4] C. C. Mac Duffee, The Theory of Matrices. Berlin 1933: Springer-Verlag.

Manuskripteingang: 20. 1. 1958

Anschrift: P. Bajcsay, V. Lehrstuhl für Mathematik an der Techn. Universität Budapest (Ungarn), I. Ostrom-u. 10

Vibrations of a beam on elastic foundation II*)

By *P. M. Mathews* **)

In einer früheren Arbeit[1]) *hat der Verfasser die Schwingungsgleichungen eines durch eine hin- und hergehende Kraft belasteten Balkens auf federnder Grundlage unter Vernachlässigung der Dämpfung für den Fall gelöst, daß der Angriffspunkt der hin- und hergehenden Kraft sich längs des Balkens verschiebt. In der vorliegenden Arbeit wird nun dem Dämpfungseinfluß Rechnung getragen; explizite für alle Frequenzen und Geschwindigkeiten der aufgebrachten Kraft geltende Lösungen werden erreicht. In qualitativer Hinsicht unterscheidet sich der vorliegende Fall vom ungedämpften vor allem dadurch, daß bei einer von Null abweichenden Geschwindigkeit die Verschiebungen des Balkens um die momentane Kraftangriffsstelle nicht mehr symmetrisch verlaufen, sondern hinten größer sind als vorn.*

In an earlier paper[1]), *the equations describing the vibrations of a beam on elastic foundation under the action of an alternating force whose point of application moves along the beam was solved by the author, neglecting damping. The effect of damping is taken into account in the present work, and explicit solutions, valid for all frequencies and velocities of the applied force, are obtained. In qualitative features the most obvious difference from the undamped case is that, for non-zero velocity, the displacements of the beam are no longer symmetric about the instantaneous position of the applied force, but are greater behind than ahead of this position.*

Dans une étude antérieure[1]) *l'auteur a résolu, sans tenir compte de l'amortissement, les équations concernant les vibrations d'une poutre sur fondation élastique sous l'effet d'une force «va et vient» dont le point d'application se déplace le long de la poutre. On tient compte, dans la présente étude, de l'effect de l'amortissement et on y parvient à des solutions explicites valables pour toutes les fréquences et toutes les vitesses de la force mise en jeu. Du point de vue qualitatif ce qui différencie le plus le cas amorti du cas non amorti est que pour une vitesse non nulle les déplacements de la poutre ne sont plus symétriques par rapport à la position instantanée de la force mise en jeu mais sont plus importants derrière cette position que devant elle.*

В предыдущем сообщении[1]) уравнеия, описывающие колебания балки, на упругом основании, под действием переменной силы, точка приложения которой движется по балке, решены автором не учитывая демпфирования. В настоящей работе демпфирование учитывается и получены явные решения справедливые для всех частот и скоростей. Что касается качественной характеристики, то наиболее явное отличие от случая демпфирования заключается в том, что для скоростей отличающихся от нуля смещения балки уже не симметричны вокруг мгновенного положения приложенной силы, а оказываются большими за этой точкой чем перед ней.

I. The Equation of Motion

It was shown in Paper I that if

ϱ = Mass per unit length of the beam,
E = Young's modulus of the material of the beam,
I = Moment of inertia of the section of the beam, about the neutral axis,
k = Elasticity of the foundation
and ν = damping force per unit length of beam per unit velocity, and if the beam is taken to

*) Contribution from the Division of Pure Physics, National Research Council, Ottawa, Canada. Issued as N.R.C. No 4931.
**) National Research Laboratories Postdoctorate Fellow.
[1]) P. M. Mathews, Z. angew. Math. Mech. 38 (1958), S. 105—115 hereinafter referred to as Paper I.

extend along the x-axis, then the function $y(x, t)$ giving its lateral displacement at the point x at time t satisfies the equation

$$E I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \varrho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial y}{\partial t} + k y = F_0 \cos \omega t \qquad \delta (x - v t) \quad \ldots \ldots (1),$$

the term on the right hand side representing the externally applied force whose point of application moves in the positive x direction with velocity v, and whose magnitude varies as $F_0 \cos \omega t$. It was further shown that the steady state solution of (1) can be written as

$$y(r, t) = y_1(r) \cos \omega t + y_2(r) \sin \omega t \quad \ldots \ldots (2)$$

where

$$r = x - v t \quad \ldots \ldots (3)$$

and $y_1(r)$ and $y_2(r)$ have Fourier transforms $p_1(s)$ and $p_2(s)$ given by

$$p_1(s) = F_0 \frac{(E I s^4 - \varrho v^2 s^2 - \nu v i s + k - \varrho \omega)^2}{(E I s^4 - \varrho v^2 s^2 - \nu v i s + k - \varrho \omega^2)^2 + (2 v \omega \varrho i s - \nu \omega)^2} \quad \ldots (4)$$

and

$$p_2(s) = F_0 \frac{-(2 v \omega \varrho i s - \nu \omega)}{(E I s^4 - \varrho v^2 s^2 - \nu v i s + k - \varrho \omega^2)^2 + (2 v \omega \varrho i s - \nu \omega)^2} \quad \ldots (5).$$

The analysis revealed the existence of a resonance frequency ω_0 for the beam, and a critical velocity v_0 representing the limit beyond which the vibrations would be unstable in the undamped case:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{\varrho}\right)^{1/2} \quad \ldots \ldots (6)$$

and

$$v_0 = \left(\frac{4 E I k}{\varrho^2}\right)^{1/4} \quad \ldots \ldots (7).$$

Now it is easily seen, e. g. by considering a mode of free vibrations in which the motion is in phase all along the beam, that the damping constant ν also has a 'critical' value ν_0, given by

$$\nu_0 = 2(k \varrho)^{1/2} \quad \ldots \ldots (8).$$

It is convenient to use ω_0, v_0 and ν_0 and the constants

$$a_0 = \left(\frac{k}{4 E I}\right)^{1/4} \quad \text{and} \quad y_0 = \left(\frac{4 E I}{k}\right)^{3/4} \frac{F_0}{8 E I} \quad \ldots \ldots (9)$$

which were defined in Paper I, to express all the quantities of the problem in non-dimensional form. Thus, on defining

$$W = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad N = \frac{\nu}{\nu_0}, \quad S = \frac{s}{a_0}, \quad R = r a_0 \quad \text{and} \quad Y = \frac{y}{y_0} \quad \ldots (10)$$

and

$$P_j(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_j(R) e^{-i R S} dR = \frac{2 k}{F_0} p_j(s) \qquad (j = 1, 2) \quad \ldots \ldots (11),$$

equation (2) becomes

$$Y(R, t) = Y_1(R) \cos \omega t + Y_2(R) \sin \omega t \quad \ldots \ldots (12),$$

$Y_1(R)$ and $Y_2(R)$ now being Fourier inverses (with respect to S) of $P_1(S)$ and $P_2(S)$ where

$$P_1(S) = \frac{8 [S^4 - 4 V^2 S^2 - 8 N V i S + 4 (1 - W^2)]}{[S^4 - 4 V^2 S^2 - 8 N V i S + 4 (1 - W^2)]^2 + 64 [V W i S - N W]^2} \quad \ldots (13)$$

and

$$P_2(S) = \frac{-64 (V W i S - N W)}{[S^4 - 4 V^2 S^2 - 8 N V i S + 4 (1 - W^2)]^2 + 64 [V W i S - N W]^2} \quad \ldots (14).$$

Inversion of (13) and (14) can be carried out if they can be split into partial fractions, for which it is necessary to factorize the denominator, or equivalently, to solve the equation

$$[S^4 - 4 V^2 S^2 - 8 N V i S + 4 (1 - W^2)]^2 + 64 [V W i S - N W]^2 = 0 \quad \ldots (15).$$

Inspection of (15) shows that its roots must occur in pairs like

$$S = \begin{cases} A_1 + i\,B_1\,, & A_2 - i\,B_2\,, \quad -A_3 + i\,B_3\,, \quad -A_4 - i\,B_4 \\ -A_1 + i\,B_1\,, & -A_2 - i\,B_2\,, \quad A_3 + i\,B_3\,, \quad A_4 - i\,B_4 \end{cases} \quad \ldots \quad (16)$$

where $A_1, \ldots, A_4$, $B_1, \ldots, B_4$ are all positive. This information about the signs of the real and imaginary parts of the roots is necessary before the formulae of Paper I (equations (24) through (27)) can be used for inversion. It is derived from the fact that the equations (15) cannot have any real or pure imaginary roots when N, V, W are all non-zero and therefore the signs of the real and imaginary parts of any root must remain constant over the whole range of values of N, V and W. Thus we deduce the pattern of signs in (16) from the known signs in special cases, e.g. when $V \ll 1$, $N \neq 0$, $W \neq 0$ as obtained by analytical continuation from the case $V = 0$, $N \neq 0$, $W \neq 0$, discussed below.

We now have eight parameters $A_1, \ldots, A_4$, $B_1, \ldots, B_4$ as against three in the case $N = 0$, and therefore the solutions are extremely unwieldy. It would appear to be simpler in any particular case, when the values of N, V and W are given, to find out the roots (16) and then proceed to carry out the inversion. We shall, therefore, confine our attention here to the simpler cases:

(i) $V = 0, \quad N \neq 0, \quad W \neq 0,$

(ii) $W = 0, \quad N \neq 0, \quad V \neq 0,$

and compare the solutions with the corresponding ones in the case of no damping, discussed in Paper I.

II. Vibrations in the damped case

(i) Alternating load at the origin: $V = 0$, $N \neq 0$, $W \neq 0$. (13) and (14) become

$$P_1(S) = \frac{8\,[S^4 + 4\,(1 - W^2)]}{[S^4 + 4\,(1 - W^2)]^2 + 64\,N^2\,W^2} \quad \ldots \quad (17)$$

and

$$P_2(S) = \frac{64\,N\,W}{[S^4 + 4\,(1 - W^2)]^2 + 64\,N^2\,W^2} \quad \ldots \quad (18)$$

and equation (15) reduces to

$$[S^4 + 4\,(1 - W^2)]^2 + 64\,N^2\,W^2 = 0\,,$$

its solutions being

$$S = \pm A \pm i\,B\,, \quad \pm B \pm i\,A \quad \ldots \quad (19),$$

where

$$A = \lambda \cos \Phi\,, \qquad B = \lambda \sin \Phi \quad \ldots \quad (20),$$

with

$$\lambda = [16\,(1 - W^2)^2 + 64\,N^2\,W^2]^{1/8} \quad \ldots \quad (21)$$

and

$$\tan 4\,\Phi = \frac{-2\,N\,W}{(1 - W^2)}\,, \quad (\pi \leq 4\,\Phi \leq 0) \quad \ldots \quad (22).$$

On splitting up $P_1(S)$ and $P_2(S)$ into partial fractions and carrying out the *Fourier* inversion using the well known procedure we obtain, after some simple algebra,

$$Y_1(R) = \frac{2}{(A^2 + B^2)^3}\,[e^{-B|R|}\{B\,(3\,A^2 - B^2)\cos A|R| + A\,(3\,B^2 - A^2)\sin A|R|\} + e^{-A|R|}\,\{A\,(3\,B^2 - A^2)\cos B|R| + B\,(3\,A^2 - B^2)\sin B|R|\}] \quad \ldots \quad (23)$$

and

$$Y_2(R) = \frac{2}{(A^2 + B^2)^3}\,[-e^{-B|R|}\{A\,(3\,B^2 - A^2)\cos A|R| - B\,(3\,A^2 - B^2)\sin A|R|\} + e^{-A|R|}\,\{B\,(3\,A^2 - B^2)\cos B|R| - A\,(3\,B^2 - A^2)\sin B|R|\}] \quad \ldots \quad (24).$$

It can be easily seen that when $N = 0$, $\Phi = \frac{\pi}{4}$ so that we have $A = B$ from (20), and hence $Y_2 = 0$ and Y_1 reduces to the expression derived in Paper I (equation (33)) if the latter also is expressed in nondimensional form. With λ und Φ chosen as parameters instead of N and W the variation of Y_1 und Y_2 with R is presented in Figs. 1 and 2 where $\lambda^3\,Y_1$ and $\lambda^3\,Y_2$ are plotted against $\lambda\,R$ for various values of Φ. For any given N and W, the corresponding values of λ and Φ can

be found from (21) and (22) and then Y_1 and Y_2 determined from the appropriate curves in Figs. 1 and 2. For instance, in the case of resonance ($W = 1$) we have $\Phi = \frac{\pi}{8}$ while λ depends on N; if W or N vanishes, $\Phi = \frac{\pi}{4}$; and when $W \gg 1$, $\Phi \to 0$.

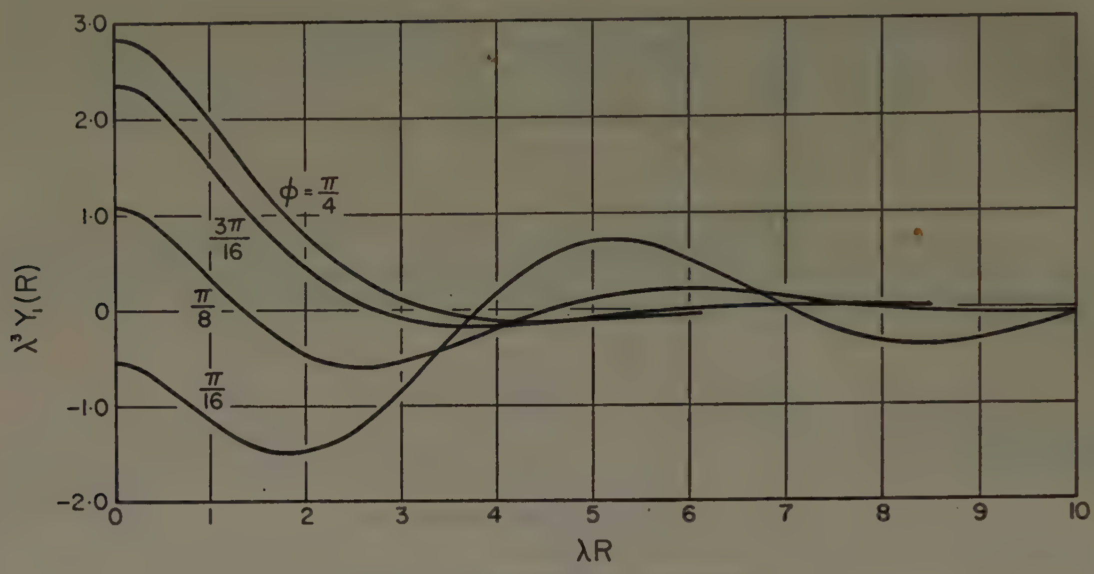


Fig. 1. $Y_1(R)$ in the case $V = 0$, $W \neq 0$, $N \neq 0$

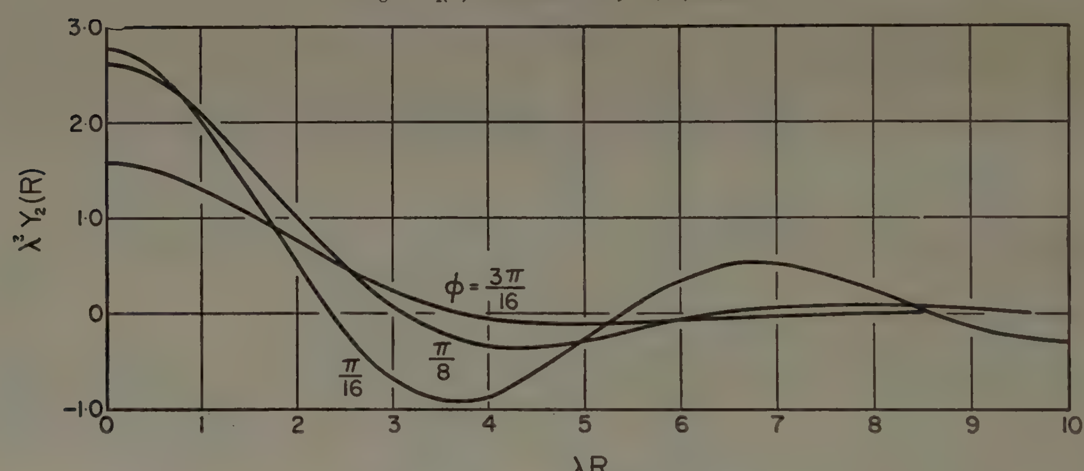


Fig. 2. $Y_2(R)$ in the case $V = 0$, $W \neq 0$, $N \neq 0$

It may be noted that while Y_2 is small compared to Y_1 for small N or W $\left(\Phi \to \frac{\pi}{4}\right)$, its magnitude increases to a value equal to that of Y_1 if the applied frequency is high ($W \gg 1$, $\Phi \to 0$). However, the absolute magnitudes of both Y_1 und Y_2 decrease rapidly as the frequency is increased above the resonance frequency. In fact it is easy to see from (23) and (24) that if $W^2 - 1 \gg 2\,N\,W$, $Y_1(0) \approx -Y_2(0) \approx -(2\,W^3)^{-1/2}$.

It is also interesting to note the dependence of $Y_1(0)$ and $Y_2(0)$ at resonance on the damping N:

$$[Y_1(0)]_{W=1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)(8\,N)^{-3/4} \quad \ldots\ldots\ldots (25),$$

$$[Y_2(0)]_{W=1} = 2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right)(8\,N)^{-3/4} \quad \ldots\ldots\ldots (26).$$

(ii) A moving load of constant magnitude: $W = 0$, $N \neq 0$, $V \neq 0$.

In this case (13) and (14) reduce to

$$P_1(S) = \frac{8}{S^4 - 4\,V^2\,S^2 - 8\,N\,V\,i\,S + 4} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

and

$$P_2(S) = 0 \quad \ldots \quad (28).$$

As usual, as a preliminary to the partial fraction expansion of (27) before inversion, we have to solve the equation obtained by setting the denominator equal to zero:

$$S^4 - 4V^2 S^2 - 8NViS + 4 = 0 \quad \ldots \quad (29).$$

Now, $S' = iS$ obviously satisfies the equation

$$S'^4 + 4V^2 S'^2 - 8NVS' + 4 = 0,$$

whose coefficients are all real, and by the application of Sturm's theorem[2]) to this equation it is easily seen that its roots are all complex or two real and two complex — and consequently those of (29) are all complex or two pure imaginary and two complex — according as

$$4(1-N^2)V^8 - (8 - 36N^2 + 27N^4)V^4 + 4 \gtrless 0 \quad \ldots \quad (30).$$

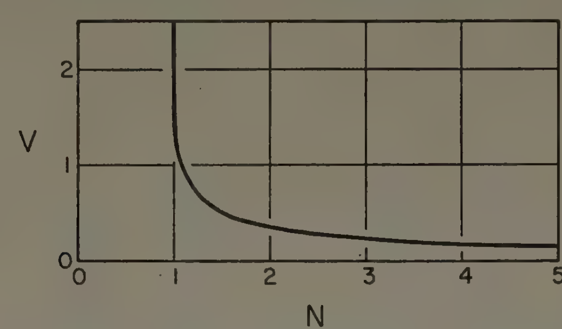


Fig. 3. The curve $4(1-N^2)V^8 - (8 - 36N^2 + 27N^4)V^4 + 4 = 0$. The nature of the vibrations depends on whether V, N values are such as to be to the left or to the right of this curve, the appropriate solutions being (35) and (41) respectively in the two cases.

When the roots of (29) are all complex, they must be of the form

$$S = \pm A_1 + iB, \quad \pm A_2 - iB \quad \ldots \quad (31),$$

where A_1, A_2, B are positive quantities satisfying the relations

$$A_1^2 + A_2^2 - 2B^2 = 4V^2 \quad \ldots \quad (32),$$

$$B(A_1^2 - A_2^2) = 4NV \quad \ldots \quad (33),$$

$$(A_1^2 + B^2)(A_2^2 + B^2) = 4 \quad \ldots \quad (34).$$

The values of A_1, A_2 and B for various values of N and V are given in Table I.

In this case inversion of (27) yields the result

$$Y_1(R) = 8\left[\frac{e^{-BR}H(R)}{A_1}\,\frac{4A_1B\cos A_1R + (4B^2 - A_1^2 + A_2^2)\sin A_1R}{16A_1^2B^2 + (4B^2 - A_1^2 + A_2^2)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{BR}H(-R)}{A_2}\,\frac{4A_2B\cos A_2R - (4B^2 + A_1^2 - A_2^2)\sin A_2R}{16A_2^2B^2 + (4B^2 + A_1^2 - A_2^2)^2}\right] \quad \ldots \quad (35),$$

where H represents the *Heaviside* unit function, i. e. $H(x) = 1$ for $x > 0$; $H(x) = 0$ otherwise. The most striking feature of the above expression for $Y_1(R)$ is the disappearance of the symmetry between the 'forward' and 'backward' directions ($R > 0$ and $R < 0$ respectively) which had been present in all the cases discussed so far. The first consequence of this is that the position of maximum displacement of the beam is no longer the point of application of the load, but a point behind it. Furthermore, the instantaneous shape of the displaced beam which has the form of a damped wave, appears as if compressed ahead of the load and stretched out behind. This tendency gets accentuated rapidly as either N or V is increased, as is evident from Fig. 4. In fact, as will be shown below, if N and V are large enough so that the second of the two alternatives in (30) holds, the shape ahead of the moving load is still that of a damped oscillatory wave, while the displacement behind has the form of a difference of two exponentials and after attaining a maximum, decreases uniformly with increasing distance.

Let us therefore suppose that N and V are such that two of the roots of (29) are pure imaginary and two complex. Then these must be of the form

$$S = \pm A + iB_1, \quad -iB_2, \quad -iB_3 \quad \ldots \quad (36),$$

[2]) See, for example, J. V. Uspensky, Theory of Equations (McGraw-Hill, 1948), Chapter VII.

Table I

V \ N		0.5	1.0		2.0	3.0	4.0	5.0
V_c				V_c	(0.341)	(0.215)	(0.158)	(0.126)
				A	1.620	1.560	1.542	1.534
				$B_1 = B_2 = B_3$	1.039	1.060	1.067	1.070
0.5	A_1	1.361	1.564	A	1.874	2.106	2.294	2.455
	A_2	0.852	0.564	B_1	1.060	1.172	1.271	1.358
	B	0.888	0.940	B_2	1.572	2.000	2.287	2.514
				B_3	0.549	0.344	0.254	0.202
1.0	A_1	2.019	2.272	A	2.625	2.905	3.108	3.295
	A_2	0.762	0.272	B_1	1.063	1.258	1.414	1.545
	B	0.572	0.786	B_2	1.858	2.346	2.701	2.989
				B_3	0.268	0.172	0.127	0.101
2.0	A_1	3.993	4.058	A	4.245	4.446	4.639	4.818
	A_2	0.431	0.058	B_1	0.863	1.149	1.377	1.568
	B	0.254	0.486	B_2	1.591	2.211	2.690	3.085
				B_3	0.134	0.086	0.064	0.051
3.0	A_1	5.998	6.018	A	6.093	6.199	6.322	6.452
	A_2	0.288	0.018	B_1	0.641	0.919	1.164	1.381
	B	0.167	0.331	B_2	1.193	1.781	2.286	2.728
				B_3	0.089	0.057	0.042	0.034
4.0	A_1	7.999	8.008	A	8.042	8.095	8.163	8.244
	A_2	0.216	0.008	B_1	0.494	0.727	0.949	1.156
	B	0.125	0.250	B_2	0.920	1.412	1.865	2.286
				B_3	0.067	0.043	0.032	0.025
5.0	A_1	10.000	10.004	A	10.022	10.050	10.089	10.146
	A_2	0.173	0.004	B_1	0.398	0.592	0.782	0.965
	B	0.100	0.200	B_2	0.742	1.150	1.538	1.910
				B_3	0.054	0.034	0.025	0.020

For any $N > 1$, the velocity at which the vibrations change character from that represented by equation (35) to that given by equation (41) — or vice versa — is denoted by V_c in the table above, and its value is given in brackets. V_c of course is given by the ordinate of the curve of Fig. 3 corresponding to the specified value of N.

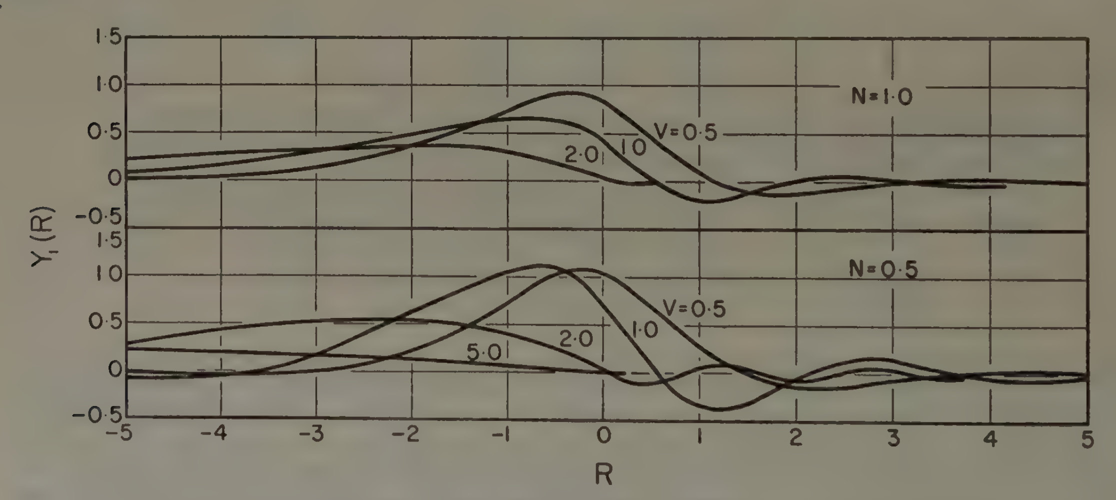


Fig. 4. $Y_1(R)$ in the case $W = 0$ as given by (35), for various values of V and N. Unlike the curves for the undamped case, the present ones are not symmetric about $R = 0$. The rapid increase of asymmetry with V and N is evident

where A, B_1, B_2, B_3 are positive and satisfy the relations

$$2 B_1 - B_2 - B_3 = 0 \quad (37),$$

$$A^2 + B_1^2 - B_2^2 - B_3^2 - B_2 B_3 = 4 V^2 \quad (38),$$

$$B_1 (A^2 + B_1^2 - B_2 B_3) = 4 N V \quad (39),$$

$$(A^2 + B_1^2) B_2 B_3 = 4 \quad (40).$$

Their values are also given in Table I for various values of N and V.

The solution for $Y_1(R)$ is now

$$Y_1(R) = 8\left[\frac{e^{-B_1 R}\,H(R)}{A}\;\frac{A\,(2\,B_1 + B_2 + B_3)\cos A\,R - \{A^2 - (B_1 + B_2)\,(B_1 + B_3)\}\sin A\,R}{\{A^2 + (B_1 + B_2)^2\}\,\{A^2 + (B_1 + B_3)^2\}} - \frac{e^{B_2 R}\,H(-R)}{\{A^2 + (B_1 + B_2)^2\}\,(B_2 - B_3)} + \frac{e^{B_3 R}\,H(-R)}{\{A^2 + (B_1 + B_3)^2\}\,(B_2 - B_3)}\right] \quad \ldots \ldots (41).$$

The displacements, for $R > 0$ as given by the first term in square brackets, and for $R < 0$ as given by the second and third terms, have of course the forms described in the preceding paragraph. The curves in Fig. 5 illustrate the variation of $Y_1(R)$ with R in the present case.

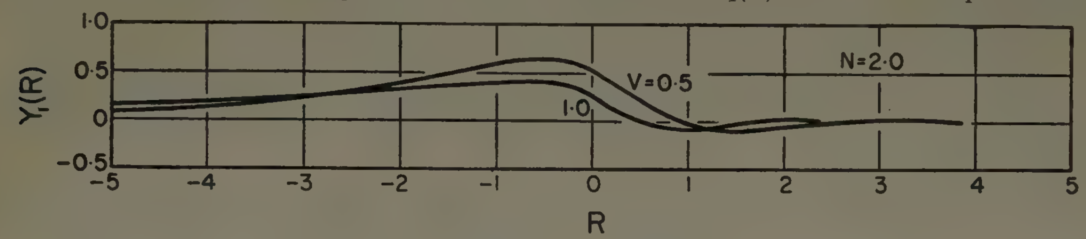


Fig. 5. $Y_1(R)$ in the case $W = 0$, as given by (41).

Acknowledgments

The author wishes to thank the National Research Council of Canada for the award of a Fellowship during the tenure of which this work has been done.

Note added in proof: Professor B. K. Hovey has recently sent me a copy of his dissertation (University of Göttingen, 1933) which contains practically all the results of paper I. He has also kindly drawn my attention to a paper by J. T. Kenney, Jr. (J. Appl. Mech., Dec. 1954, p. 359) in which those results of the present paper that refer to a moving constant load appear. Thus, with due regard to the notation, it can be shown that if we replace the parameter B in equation (35) and $\frac{1}{2}(B_2 + B_3)$ in equation (41) by η and express the other parameters in terms of η then these become identical with Kennys results for the 'underdamped' and 'overdamped' cases respectively.

Manuskripteingang: 1. 2. 1958

Anschrift: P. M. Mathews, Division of Pure Physics, National Research Council of Canada, Ottawa — 2 (Kanada)

Über Schraubentriebe mit parallelen Achsen zur kombinierten Grob- und Feineinstellung

Von *W. Noli*

Aus Schraubenmutter und Schraubenspindel mit größerem Spiel oder aus zwei Schraubenspindeln lassen sich Schraubentriebe herstellen, mit denen man nach Wunsch groben oder feinen Vortrieb erhalten kann. Die Berührungsbedingungen dafür benötigter Schraubflächenpaare mit Linienberührung und Wege zu ihrer Formgebung werden aufgezeigt.

Screw and nut with sufficient play, or two male screws, can be used to construct a gear that gives optionally coarse or fine advance. For the two screw surfaces required for this purpose the conditions of line contact as well as modes of forming are indicated.

D'un écrou et d'une tige filetée avec jeu assez libre ou de deux tiges filetées on peut construire des vissages au moyen desquels on peut obtenir sur désir un avancement approximatif ou minutieux. Les conditions de contact des paires de surface à visser avec contact des lignes y nécessaires et des chemins à leur façonnage sont indiqués.

Из гайки и винтового шпинделя с большим зазором или из двух шпинделей можно составить червячную передачу, при помощи которой по желанию можно получить скорую или медленную подачу. Указываются условия соприкосновения употребляемых при этом пар винтовых поверхностей с соприкосновением вдоль кривой и даются указания на то, какой вид требуется придать этим поверхностям.

I.

Werden, einem aus der Praxis kommenden Vorschlag gemäß, eine Schraubenspindel und eine Schraubenmutter mit gleicher Ganghöhe h und größerem Spiel $r_2 - r_1$ wie in Bild 1 angeordnet, so entsteht ein Schraubentrieb, mit welchem sich je nach Wunsch eine Grob- oder eine Feineinstellung erzielen läßt. Hält man nämlich die Mutter fest, dann führt eine lockere Drehung der Spindel um den Winkel α_1 zu einem Vortrieb vom Betrage

$$z_1 = p \cdot \alpha_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

wobei $p = h/2\pi$ den Schraubparameter (die reduzierte Ganghöhe) bezeichnet. Drückt man hingegen die Spindel gegen die Mutter, so daß ein Abwälzen der einander längs einer Erzeugenden e berührenden Zylinderflächen erfolgt und auch die Mutter eine Drehung um den Winkel $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot r_1/r_2$ vollführt (was durch Längsriffelung der Zylinder erzwungen werden kann), so beträgt der Vortrieb der Spindel nur mehr

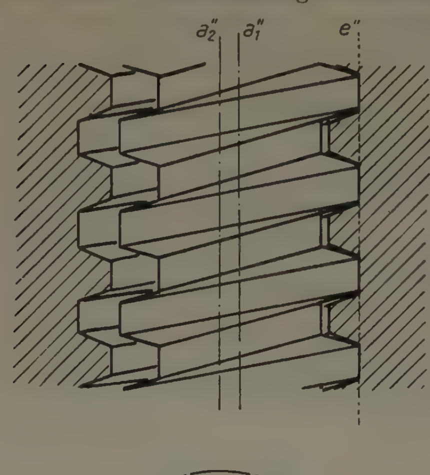
$$\Delta z = z_1 - z_2 = p \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{r_2 - r_1}{r_2} z_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Durch Festhalten oder Loslassen der Mutter läßt sich daher wahlweise ein größerer oder kleinerer Vortrieb erreichen.

Für die Formgebung der Schraubflanken ist die Forderung maßgebend, bei der zweiten Bewegungsart — die die genauere Passung verlangt — wenigstens Linienberührung zu haben. Es liegt mithin folgende geometrische Aufgabenstellung vor: Zwei Schraubflächen Φ_1 und Φ_2 mit parallelen Achsen a_1 und a_2 und derselben Ganghöhe h sind zu konstruieren, die einander längs einer Linie berühren.

Zur Untersuchung der bei solchen Schraubflächenpaaren obwaltenden Verhältnisse stellen wir uns zur Vereinfachung der Ausdrucksweise die Schraubachsen lotrecht vor. Da eine Schraublinie vom Radius r die Steigung $\operatorname{tg}\beta = h/2r\pi = p/r$ aufweist, können wir die zu einem Punkt P gehörige Schraubtangente jeweils durch einen Vektor $\overrightarrow{PT}$ kennzeichnen, dessen Vertikalkomponente den Betrag p hat, während seine Horizontalkomponente durch eine Viertelschwenkung aus dem Achsenabstand $Pa = r$ hervorgeht. (Ich habe solche Vektoren in der früheren Arbeit [1] „Tangentenzeiger" genannt.)

Es sei nun P ein Punkt der Berührungslinie der beiden Schraubflächen Φ_1 und Φ_2. Die gemeinsame



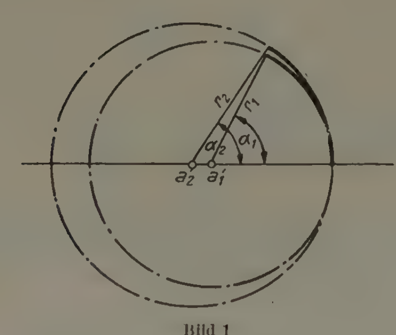


Bild 1

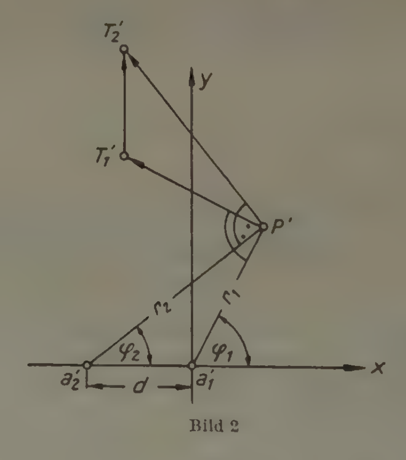


Bild 2

Tangentialebene in P enthält die beiden Schraubtangentenvektoren $\overrightarrow{PT_1}$ und $\overrightarrow{PT_2}$, daher auch den Vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$. Da dieser, wie aus dem Grundrißbild 2 zu entnehmen ist, zur Verbindungsebene der Schraubachsen a_1, a_2 senkrecht steht, so gilt der grundlegende

Satz 1: Berühren einander zwei Schraubflächen mit parallelen Achsen und gleicher Ganghöhe längs einer Linie, so läßt sich ihnen längs dieser Linie ein zur Verbindungsebene des Achsenpaares normaler Tangentialzylinder anschreiben. — Die Berührungslinie stellt daher einen gemeinsamen Umriß der Schraubflächen für Normalprojektion auf die Achsenebene (Aufriß) dar.

Zur Ermittlung eines berührenden Schraubflächenpaares Φ_1, Φ_2 sind verschiedene Wege gangbar, von denen drei nachstehend skizziert werden sollen.

1. Man nimmt etwa die Fläche Φ_1 beliebig an, d. h. man verwendet für die Spindel irgendein gebräuchliches Gewinde. Die Flankenfläche Φ_2 der Mutter ergibt sich dann als Einhüllende der um a_2 verschraubten Fläche Φ_1. Die Berührungslinie k läßt sich dabei nach bekannten Regeln der darstellenden Geometrie (vgl. etwa [2]) als Umriß von Φ_1 bei Normalprojektion auf die (Aufriß-)Ebene $[a_1 a_2]$ konstruieren, Φ_2 kann anschließend durch Verschraubung von k um a_2 erzeugt

werden. Man findet insbesondere den Achsenschnitt von Φ_2 durch Verschraubung der einzelnen Punkte von k in die Ebene $[a_1 a_2]$.

Wird zur rechnerischen Behandlung ein Normalkoordinatensystem x, y, z so gewählt, daß a_1 in die z-Achse fällt und a_2 durch $x = -d$, $y = 0$ festgelegt wird, und ist Φ_1 durch den Meridianschnitt

$$x_1 = r_1, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = z_1(r_1) \quad \ldots \quad (3)$$

vorgegeben, dann lautet eine Parameterdarstellung von Φ_1

$$x = r_1 \cdot \cos \varphi_1, \quad y = r_1 \cdot \sin \varphi_1, \quad z = z_1 + p \cdot \varphi_1 \quad \ldots \quad (4).$$

Die Tangentialebene eines Punktes von Φ_1 wird von den beiden partiellen Ableitungsvektoren $(\cos \varphi_1, \sin \varphi_1, z_1'(r_1))$ und $(-r_1 \cdot \sin \varphi_1, r_1 \cdot \cos \varphi_1, p)$ aufgespannt; sie ist, wie es die Berührungsbedingung (Satz 1) verlangt, parallel zur y-Richtung, wenn

$$z_1' \cdot r_1 \cdot \sin \varphi_1 + p \cdot \cos \varphi_1 = 0 \quad \ldots \quad (5).$$

Die Berührungslinie k wird daher mit r_1 als Parameter durch (4) beschrieben, wenn φ_1 gemäß

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = -r_1 \cdot z_1'(r_1)/p \quad \ldots \quad (5a)$$

eingesetzt wird. Die Meridiankurve von Φ_2 kann dann durch Rückverschraubung der Punkte von k in die Ebene $y = 0$ gefunden werden; Schraubwinkel φ_2 und Schraubradius r_2 ergeben sich dabei unter Verwendung der eben bestimmten Werte aus (4) nach Bild 2 vermöge

$$d + x = r_2 \cdot \cos \varphi_2, \quad y = r_2 \cdot \sin \varphi_2 \quad \ldots \quad (6)$$

durch

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y}{d + x}, \quad r_2^2 = (d + x)^2 + y^2 = r_1^2 + 2\, d \cdot r_1 \cdot \cos \varphi_1 + d^2 \quad \ldots \quad (7).$$

Der gesuchte Meridian wird somit dargestellt durch

$$x_2 = r_2 - d, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = z - p \cdot \varphi_2 = z_1 + p \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \ldots \quad (8).$$

Dieses Verfahren ist beispielsweise angezeigt, wenn die Spindel ein normales Spitz- oder Trapezgewinde trägt; z_1 ist dann eine lineare Funktion von r_1 ($z_1' = \text{const}$).

2. Eine zweite Möglichkeit besteht in der Vorgabe des Grundrisses der Berührungslinie k, etwa durch seine Polargleichung

$$r_1 = r_1(\varphi_1) \quad \ldots \quad (9).$$

Die Berührungsbedingung (5) liefert dann durch Integration

$$z_1 = -p \int \operatorname{ctg} \varphi_1 \frac{dr_1}{r_1} \quad \ldots \quad (10),$$

wodurch der Meridian $z_1 = z_1(r_1)$ von Φ_1 festgelegt ist. Die Bestimmung von Φ_2 vollzieht sich dann wie unter 1.

In der vorangegangenen Arbeit [1] wurde beispielsweise die Annahme eines zur x-Achse symmetrischen kreisförmigen Grundrisses behandelt. Durch geometrische Betrachtung wurde dort gezeigt, daß die zugehörige Berührungslinie k eine Schraublinie mit derselben Ganghöhe $h = 2\pi p$ ist, was zur Folge hat, daß die Flanken Φ_1 und Φ_2 zyklische Schraubflächen sind.

3. Als dritte Möglichkeit käme schließlich auch die Annahme des y-parallelen Tangentialzylinders in Betracht, dessen Profil (Aufriß der Berührungslinie k) durch

$$z = z(x) \quad \ldots \quad (11)$$

gegeben sei. Die Schraubflächen Φ_1 bzw. Φ_2 entstehen als Einhüllende bei Verschraubung des Zylinders um a_1 bzw. a_2. Ein Punkt (x, y, z) der Berührungslinie k ist dadurch gekennzeichnet, daß sein Schraubtangentenvektor $(-y, x, p)$ in der Tangentialebene des Zylinders liegt. Das führt auf die Bedingung

$$z'(x) = -\frac{p}{y} \quad \text{oder} \quad y = -\frac{p}{z'(x)} \quad \ldots \quad (12).$$

Aus (4) lassen sich dann die Größen r_1, φ_1 und z_1 berechnen, womit die Fläche Φ_1 — insbesondere durch ihren Meridian $z_1 = z_1(r_1)$ — vollkommen bestimmt ist. Analog findet man Φ_2, wobei die Gleichungen (7) und (8) verwendet werden können.

Wird der Berührungszylinder etwa als Ebene vorgeschrieben ($z = m\,x$), dann sind die Flankenflächen Φ_1 und Φ_2 Schraubtorsen (abwickelbare Schraubflächen), die einander längs einer geraden Erzeugenden k ($y = -p/m$) berühren. Solche Schraubflanken sind beispielsweise von den Schrägzahnrädern mit Evolventenverzahnung her geläufig; sie erscheinen wegen ihres gleichartigen Charakters besonders empfehlenswert.

II.

In I. bestand ein Schraubentrieb aus Schraubenmutter und Schraubenspindel. Eine kombinierte Grob- und Feineinstellung läßt sich aber auch durch Verwendung zweier Schraubenspindeln erreichen.

Wir denken uns, wie dies Bild 3 zeigt, zwei Schraubenspindeln mit parallelen Achsen a_1, a_2 von gleicher Ganghöhe h, jedoch entgegengesetzter Windung im Eingriff. Wie in I. ergibt

$$z_1 = p \cdot \alpha_1 \quad \text{(1)}$$

den groben Vortrieb, wenn man bei lockerer Drehung der ersten Spindel die zweite Spindel festhält, die die Rolle der Mutter übernimmt, während man den kleinen Vortrieb

$$\Delta z = \frac{r_2 - r_1}{r_2} z_1 \quad \text{(2)}$$

erhält, wenn man beim Drehen die beiden Spindeln so gegeneinander drückt, daß die längs einer Erzeugenden e berührenden Zylinderflächen aufeinander abwälzen.

Eine solche Anordnung hat den Vorteil, daß die Spindeln — z. B. durch Ausschwenken der einen — leichter voneinander gelöst werden können wie Spindel und Mutter und dadurch ein handlicher Ein- und Ausbau erfolgen kann. Das ist besonders bei Maschinen vorteilhaft, bei denen öfter eine Änderung des Vortriebes benötigt wird. Man kann dann zu einer Spindel einen Satz dazu passender Spindeln anfertigen und nach Bedarf auswechseln. Auch der einseitige Lagerdruck, der besonders bei der zweiten Bewegungsart entsteht, läßt sich für eine Spindel aufheben, wenn man zwei oder mehrere gleichartige Spindeln symmetrisch um die erste anordnet; der Druck bei diesen Spindeln verteilt sich dann auf mehrere Lager.

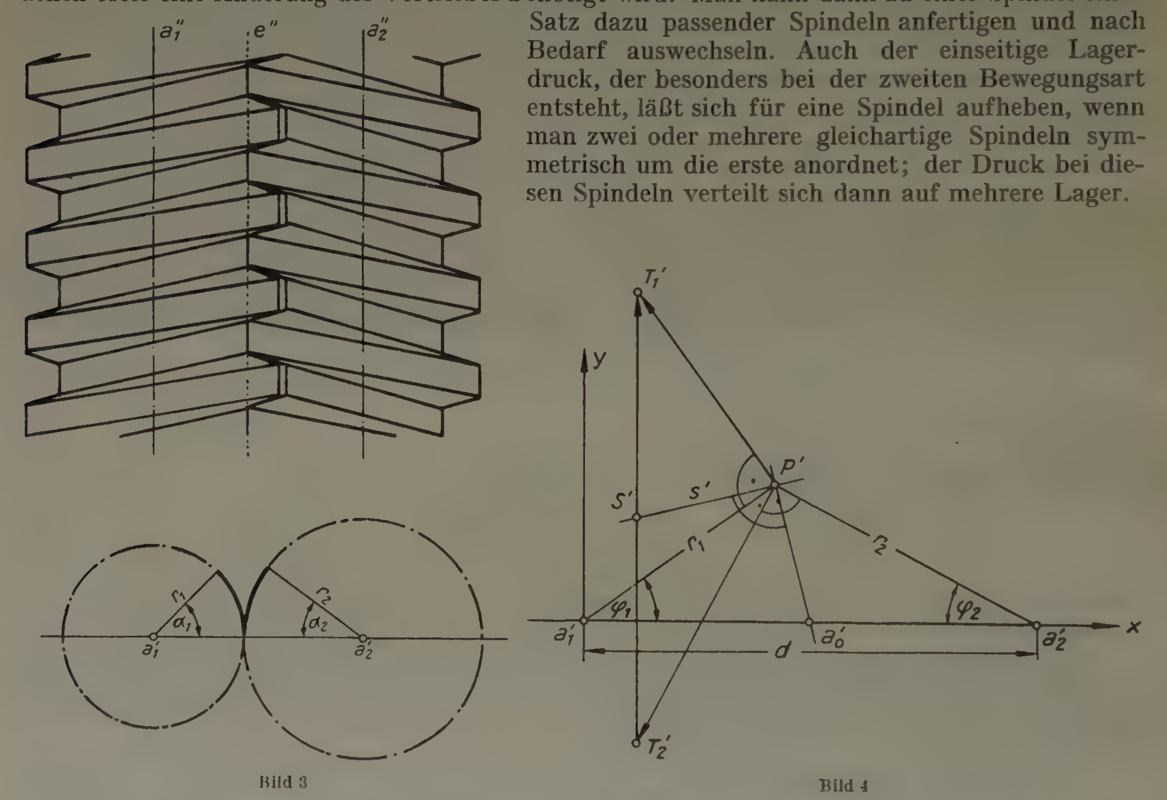


Bild 3

Bild 4

Hält man schließlich die eine Spindel fest, so daß sich die andere Spindel abwälzend um sie herumbewegt, so führt ein Radienunterschied der Zylinderflächen ebenfalls zu dem Vortrieb (2). Eine solche Bewegung — es ist im wesentlichen die zweite Bewegungsart — ist eine Schrotung, wie sie H. Horninger in [3] eingehend untersucht hat. So kann der vorliegende Aufsatz auch als kleine Ergänzung in dem Sinne angesehen werden, daß auf Möglichkeiten einer praktischen Durchführung einer solchen Schrotung hingewiesen wird. Auch eine Arbeit von F. Hohenberg ist in diesem Zusammenhang zu nennen [4], in der allgemein die Zusammensetzung zweier Schraubungen untersucht wird.

Zur Bestimmung der Schraubflanken wird man wieder von der Forderung ausgehen, daß bei der zweiten Bewegungsart Linienberührung vorliegen soll. Die Aufgabe lautet: Es sind zwei Schraubflächen Φ_1 und Φ_2 zu bestimmen mit parallelen Achsen a_1 und a_2 von derselben Ganghöhe, aber entgegengesetzter Windung.

Unter Verwendung der in I. erklärten Tangentenvektoren folgt aus dem Grundrißbild 4, daß für jeden Punkt P

$$\triangle a_1' a_2' P' \cong \triangle T_1' T_2' P' .$$

Nun liegt T_1 um p höher, T_2 um p tiefer als P. Eine gemeinsame Tangentialebene wird aufgespannt von $\overrightarrow{PT_1}$ und $\overrightarrow{PT_2}$; sie enthält auch den Vektor $\overrightarrow{T_2T_1}$ der Steigung $\frac{2p}{d}$ zu Π_1 mit $d = \overline{a_1' a_2'}$. Da auch für jeden Punkt P $\overline{T_1' T_2'} = d$, folgt der

Satz 2: Berühren einander zwei Schraubflächen mit parallelen Achsen, gleicher Ganghöhe, aber verschiedener Windung, so läßt sich ihnen längs dieser Linie ein Tangentialzylinder anschreiben; die Erzeugenden dieses Zylinders haben zur Verbindungsebene der Achsen die Neigung $\operatorname{tg} \nu = \frac{d}{2p}$, ihre Normalprojektion auf diese Ebene ist parallel zu den Achsen.

Zur Ermittlung des berührenden Schraubflankenpaares Φ_1, Φ_2 sollen die in I. skizzierten Möglichkeiten betrachtet werden.

1. Die Fläche Φ_1 sei beliebig vorgegeben. Dann ist Φ_2 als Einhüllende der um a_2 verschraubten Fläche Φ_1 bestimmt. Die allgemeinen Bemerkungen in I.1. gelten hier entsprechend.

Zur rechnerischen Behandlung sei Φ_1 wieder durch den Meridianschnitt

$$x_1 = r_1\,, \quad y_1 = 0\,, \quad z_1 = z_1(r_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

festgelegt und die Parameterdarstellung

$$x = r_1 \cdot \cos \varphi_1\,, \quad y = r_1 \cdot \sin \varphi_1\,, \quad z = z_1 + p \cdot \varphi_1 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

für Φ_1 verwendet. Bei Berührung muß die von den partiellen Ableitungsvektoren aufgespannte Tangentialebene den Vektor $\overrightarrow{T_2T_1} = (0, d, 2p)$ enthalten. Es ist also

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & z_1'(r_1) \\ -r_1 \cdot \sin \varphi_1 & r_1 \cdot \cos \varphi_1 & p \\ 0 & d & 2p \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

oder

$$2\,p\,r_1 - d \cdot r_1 \cdot z_1'(r_1) \cdot \sin \varphi_1 - p\,d \cdot \cos \varphi_1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13a)$$

die Berührungsbedingung. Dadurch ist die Berührungslinie k festgelegt. Durch Rückschrauben der Punkte von k um a_2 nach $y = 0$ erhält man die Meridiankurve von $\Phi_2 \cdot \varphi_2$ und r_2 ergeben sich aus (4) nach Bild 4 vermöge

$$d - x = r_2 \cdot \cos \varphi_2\,, \quad y = r_2 \cdot \sin \varphi_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

durch

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y}{d - x}\,, \quad r_2 = (d - x)^2 + y^2 = r_1^2 - 2\,d \cdot r_1 \cdot \cos \varphi_1 + d^2 \quad \ldots \quad (15);$$

der gesuchte Meridian ist dargestellt durch

$$x_2 = d - r_2\,, \quad y_2 = 0\,, \quad z_2 = z - p \cdot \varphi_2 = z_1 + p\,(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \ldots \quad (16).$$

Für ein Trapez- oder Spitzgewinde ist $z_1'(r_1) = m$ konstant, also

$$r_1 = \frac{p \cdot d \cdot \cos \varphi_1}{2\,p - m \cdot d \cdot \sin \varphi_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13b).$$

2. Gibt man den Grundriß k' der Berührungslinie k vor, so muß ihre Fortschreitungsrichtung (dx, dy, dz) in der Ebene durch den Schraubtangentenvektor $(-y, x, p)$ und die Erzeugendenrichtung $(0, d, 2p)$ des Tangentialzylinders liegen, also

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ -y & x & p \\ 0 & d & 2p \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

oder

$$p\,(2\,x - d)\,dx + 2\,p\,y\,dy - d \cdot y\,dz = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17a).$$

Diese Berührungsbedingung führt bei gegebenem Grundriß von k (etwa durch $x = x(t)$, $y = y(t)$) zu

$$z = \frac{2\,p}{d}\,y + \frac{p}{d} \int \frac{2\,x - d}{y}\,dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18).$$

Jst z. B. der Grundriß von k eine Gerade $x = a\,y + b$, wird

$$z = \frac{2\,p}{d}\Big[(1 + a^2)\,y + \frac{a}{2}\,(2\,b - d)\cdot \lg y\Big] + \text{Const.} \qquad (18a)$$

eine affine Logarithmuskurve. Für den Sonderfall $y = c$ erhält man

$$z = \frac{2\,p}{d}\Big(\frac{1}{2\,c}\,x^2 - \frac{d}{2\,c}\,x + c\Big) + \text{Const.} \qquad (18b)$$

eine Parabel.

Da die Spurparallelen s der Tangentialebenen — wie aus Bild 4 ersichtlich — für alle P durch die Mittelpunkte S der T_1T_2 gehen, schneiden die Normalen durch P die gleiche Gerade a_0, für die $a_1'a_0' = a_0'a_2'$. Daher sind auch Kreise um a_0 mögliche Berührungslinien.

3. Schreibt man den Tangentialzylinder der Erzeugendenrichtung $(0, d, 2p)$ vor, so erhält man durch seine Verschraubung um a_1 bzw. a_2 als Einhüllende die Flankenflächen Φ_1 bzw. Φ_2.

In einem Punkt der Berührungslinie k muß die Richtung der Schraubtangente $(-y, x, p)$ in der Tangentialebene des Zylinders liegen. Ist dieser durch seine Spur

$$z = z(x) \qquad (19)$$

in $y = 0$ bestimmt, können wir seine Tangentialebene durch die Erzeugendenrichtung $(0, d, 2p)$ und die entsprechende Tangente an (19), etwa $(1, 0, z'(x))$ festlegen. Für die Berührungslinie muß

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & z'(x) \\ 0 & d & 2p \\ -y & x & p \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

bzw.

$$y = \frac{p}{d}\cdot\frac{2\,x - d}{z'(x)} \qquad (20a).$$

Ist $z(x)$ eine Gerade $z = m\,x + b$, wird der Berührungszylinder zur Ebene $z = m\,x + b + 2\,p\,y/d$. Φ_1 und Φ_2 sind Schraubtorsen, die sich längs der Geraden vom Grundriß

$$y = \frac{2\,p}{dm}\,x + \frac{p}{m} \qquad (20b)$$

berühren.

III.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man einen Schraubentrieb nicht nur bei gleichen Parametern und gleicher (I.) oder verschiedener (II.) Windung erhalten kann.

Die Berührungsüberlegungen zu Bild 4 bleiben erhalten, wenn man a_1 den Parameter p_1, a_2 den Parameter p_2 zuordnet. $\overrightarrow{T_2T_1}$ hat dann zu Π_1 die Steigung $(p_1 - p_2)/d$, so daß man den Satz 2 verallgemeinern kann zu

Satz 3: Berühren einander zwei Schraubflächen mit parallelen Achsen und den Parametern p_1, p_2, so läßt sich längs der Berührungslinie ein gemeinsamer Tangentialzylinder anschreiben; die Erzeugenden dieses Zylinders haben zur Verbindungsebene der Achsen die Neigung $\operatorname{tg}\nu = d/(p_1 - p_2)$, ihre Normalprojektion auf diese Ebene ist parallel zu den Achsen.

In I. ist $p_2 = p_1$, in II. $p_2 = -p_1$.

Praktisch könnte man z. B. durch die Annahme $p_1 = \pm 2\,p_2$ Schraubentriebe aus ein- und zweigängigen Schraubenspindeln herstellen. Für eine kombinierte Grob- und Feineinstellung müßte dann zu $p_1 = -2\,p_2$ $r_1 \approx 2\,r_2$ gewählt werden. Die erste Spindel hat dann etwa den doppelten Durchmesser der zweiten, was besonders vorteilhaft ist wenn man um sie zwei oder mehrere Spindeln symmetrisch anordnet, eine Möglichkeit, auf die bereits in II. hingewiesen wurde. — Zwar nicht als Schraubentrieb, doch als Sonderfall mit $p_1 \neq 0$, $p_2 = 0$ läßt sich auch ein Gruppenfräser und ein von ihm gefrästes Gewinde ansehen (vgl. Abb. 299 aus [5]).

Literatur

[1] W. Noli, Über Schraubenabbildungen. Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar Gießen, Heft 51, 1954.
[2] Müller-Kruppa, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Wien 1948: Springer-Verlag (5. Auflage).
[3] H. Horninger, Über Konchoidenschraublinien und die durch Konchoidenschraubung erzeugbaren Regelschraubflächen. Monatshefte für Mathematik **58** (1954), 4. Heft.
[4] F. Hohenberg, Über die Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen. Monatshefte für Mathematik **54** (1950), 3. Heft.
[5] F. Hohenberg, Konstruktive Geometrie für Techniker. Wien 1956: Springer-Verlag.

Manuskripteingang: 8. 2. 1958

Anschrift: Dr. W. Noli, Dutenhofen (Kreis Wetzlar), Rosenweg 12

Resistance on a sphere due to a circular vortex filament in an uniform flow of a perfect liquid

By *M. K. Mitra*

Die Arbeit gibt einen Ausdruck (nach Kugelfunktionen entwickelt) für den Widerstand an einer Kugel, der bei gleichmäßiger Strömung einer idealen Flüssigkeit durch einen kreisförmigen Wirbelfaden hervorgerufen wird. Zuerst wird mit Hilfe des Butlerschen Kugeltheorems die Stromfunktion gefunden; der Widerstand an der Kugel wird sodann mittels der Bernoullischen Druckgleichung berechnet.

This paper gives a formula for resistance (in series of Legendre functions) on a sphere due to a circular vortex filament in an uniform flow of a perfect liquid. The stream function of the motion has been found by Butler's sphere Theorem and then the resistance on the sphere is calculated by means of Bernoulli's pressure equation.

L'article donne une expression (dans le développement de fonctions sphériques) pour la résistance sur une boule qui, dans un courant uniforme d'un liquide idéal, est provoquée par un fil de tourbillon circulaire. D'abord on trouve les fonctions de courant à l'aide du théorème sphérique de Butler; ensuite la résistance sur la boule est évaluée au moyen de l'équation de pression selon Bernoulli.

В работе дается (в виде разложения в ряд шаровых функций) выражение для сопротивления около шара, вызываемого при равномерном течении идеальной жидкости кругообразной вихревой нитью. В первую очередь при помощи теоремы Бутлера определяется функция тока; сопротивление около шара вычисляется затем при помощи уравнения давления Бернулли.

1. Introduction

In this paper, a formula for resistance on a sphere due to a circular vortex filament in an uniform flow of a perfect liquid is found. This problem arises in connection with the investigation of resistance experienced by a sphere due to its wake, when it is moving uniformly through a liquid of small viscosity (such as water). The wake in three dimensions has been investigated by many and it is concluded that the only quasi-steady motion associated with the wake is that of a series of vortex rings at equal distances apart and with their planes perpendicular to the direction of uniform flow. But that is also proved to be unstable (Ref. Levy and Forsdyke, 1927) and it is concluded that the wake is turbulent (Ref. Jefferys, 1930). But initially there is a formation of a concentrated vortex which derives its vorticity from the free surface layer. At first its strength is small. It then gains its strength and size and ultimately breaks away from the free surface layer. The corresponding problem in two dimensions (i. e., resistance on a circular cylinder due to two symmetrically situated rectilinear vortices with opposite circulation) has been solved by Bickley in 1928. But in three dimensions, no such theoretical attempt has ever been made, as far as I remember.

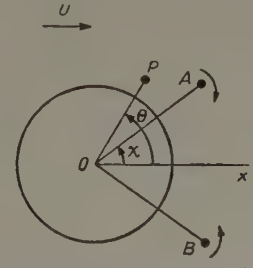
2. Determination of stream function

A, B intersections of the filament with the meridian plane.

$O \rightarrow$ centre of the sphere $\rightarrow$ origin

$Ox \rightarrow$ direction of uniform flow U at infinity.

(r, Θ), $(R, \chi) \rightarrow$ polar coordinates of a point P in the liquid and A respectively.



Due to the uniform flow U at infinity past a sphere (radius a), the stream function is

$$\psi_0 = -\frac{1}{2} U y^2 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) .$$

when there is a circular vortex filament alone in the liquid and the liquid at infinity is at rest, the stream function is

$$\psi_1 = \frac{m}{2\pi} (r \sin\theta)^{1/2} (R \sin\chi)^{1/2} \cdot \vartheta$$

(Ref. Lamb, Hydrodynamics, 6th Edn.),

where $\vartheta = \left(\frac{2}{k} - k\right) F - \frac{2}{k} E$

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \cdot d\alpha, \quad k^2 = \frac{4\, r\, R \sin\theta \sin\chi}{r^2 - 2\, r\, R \cos(\theta + \chi) + R^2} \; (0 < k^2 < 1),$$

where m = strength of the vortex filament, the sense of rotation of the liquid in the filament being clockwise in the upper half of the meridian plane.

When a sphere (radius a) is introduced in the flow due to a circular vortex filament (the liquid at infinity is at rest), the perturbed stream function is given by *Butler*'s sphere Theorem. Ref. Milne-Thompson, Theoretical Hydrodynamics, 1955), as

$$\psi_2 = -\frac{r}{a} \psi_1\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) = -\frac{m}{2\pi} (r \sin\theta)^{1/2} (R \sin\chi)^{1/2} \cdot \vartheta',$$

where $\vartheta' = \left(\frac{2}{k'} - k'\right) F' - \frac{2}{k'} E'$

$$F' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \alpha}}, \quad E' = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \alpha} \cdot d\alpha,$$

$$k'^2 = \frac{4\, a^2\, r\, R \sin\theta \sin\chi}{a^4 - 2\, a^2\, r\, R \cos(\theta + \chi) + r^2 R^2} \quad (0 < k'^2 < 1)$$

when there is a filament in an uniform flow past a sphere (radius a), the resultant stream function is given by

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 = -\frac{1}{2} v\, r^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{m}{2\pi} (r \sin\theta)^{1/2} (R \sin\chi)^{1/2} (\vartheta - \vartheta') \quad (1),$$

where ϑ and ϑ' have been defined earlier.

Now

$$F = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \cdots\right] = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right),$$

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1^2}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \cdots\right] = \frac{\pi}{2} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right),$$

$$\vartheta = \left(\frac{2}{k} - k\right) F - \frac{2}{k} E = \frac{\pi k^3}{16}\left[1 + \frac{3}{4} k^2 + \frac{75}{128} k^4 + \frac{245}{512} k^6 + \frac{6615}{16384} k^8 + \frac{22869}{65536} k^{10} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(\frac{3}{2} + n - 1\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(\frac{3}{2} + n - 1\right)}{1 \cdot 2 \cdots \quad n \cdot 3 \cdot 4 \cdots \quad n + 2} k^{2n}\right]$$

(the n-th term being deduced from the n-th terms of F and E)

$$= \frac{\pi}{16} k^3 f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3, k^2\right)$$

f denoting a hypergeometric function.

Now

$$k^2 = \frac{4\, r\, R \sin\theta \sin\chi}{r^2 - 2\, r\, R \cos(\theta + \chi) + R^2} = 4 \frac{r}{R} \sin\theta \sin\chi \left[1 - 2\beta \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right]^{-1},$$

(where $\beta = \cos(\theta + \chi)$)

$$= 4 \frac{r}{R} \sin\theta \sin\psi \left[1 + 2\beta \frac{r}{R} + (4\beta^2 - 1) \frac{r^2}{R^2} + (8\beta^3 - 4\beta) \frac{r^3}{R^3} \right.$$

$$\left. + (16\beta^4 - 12\beta^2 + 1) \frac{r^4}{R^4} + (32\beta^5 - 32\beta^3 + 6\beta) \frac{r^5}{R^5} + \cdots\right]$$

expanding in powers of $\frac{r}{R}\cdot(r < R)$ and writing the series up to six terms.

$$\vartheta = \frac{\pi}{16}k^3\left[1+\frac{3}{4}k^2+\frac{75}{128}k^4+\frac{245}{512}k^6+\frac{6615}{16384}k^8+\frac{22869}{65536}k^{10}+\cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}(\sin\theta\sin\chi)^{3/2}\left[1+2\beta\frac{r}{R}+(4\beta^2-1)\frac{r^2}{R^2}+(8\beta^3-4\beta)\frac{r^3}{R^3}+(16\beta^4-12\beta^2+1)\cdot\frac{r^4}{R^4}\right.$$
$$\left.+(32\beta^5-32\beta^3+6\beta)\frac{r^5}{R^5}+\cdots\right]^{3/2}$$

$$\left[1+3\frac{r}{R}\sin\theta\sin\chi\left\{1+2\beta\frac{r}{R}+(4\beta^2-1)\frac{r^2}{R^2}+(8\beta^3-4\beta)\frac{r^3}{R^3}+(16\beta^4-12\beta^2+1)\frac{r^4}{R^4}\right\}\right.$$
$$+\frac{75}{8}\frac{r^2}{R^2}\sin^2\theta\sin^2\chi\left\{1+2\beta\frac{r}{R}+(4\beta^2-1)\frac{r^2}{R^2}+(8\beta^3-4\beta)\frac{r^3}{R^3}\right\}^2$$
$$+\frac{245}{8}\frac{r^3}{R^3}\sin^3\theta\sin^3\chi\left\{1+2\beta\frac{r}{R}+(4\beta^2-1)\frac{r^2}{R^2}\right\}^3$$
$$\left.+\frac{6615}{64}\frac{r^4}{R^4}\sin^4\theta\sin^4\chi\left\{1+2\beta\frac{r}{R}\right\}^4+\frac{22869}{64}\frac{r^5}{R^5}\sin^5\theta\sin^5\chi+\cdots\right]$$

writing the series in ϑ to such terms as to obtain an expansion of ϑ in powers of $\frac{r}{R}$ correct to six terms.

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}(\sin\theta\sin\chi)^{3/2}\left[1+3\beta\frac{r}{R}+\left(15\beta^2-\frac{3}{2}\right)\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{35}{2}\beta^3-\frac{15}{2}\beta\right)\frac{r^3}{R^3}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{315}{8}\beta^4-\frac{105}{4}\beta^2+\frac{15}{8}\right)\frac{r^4}{R^4}+\left(\frac{693}{8}\beta^5-\frac{315}{8}\beta^3+\frac{105}{8}\beta\right)\frac{r^5}{R^5}+\cdots\right]$$

$$\left[1+3\gamma\cdot\frac{r}{R}+\left(6\beta\gamma+\frac{75}{8}\gamma^2\right)\frac{r^2}{R^2}+\left(12\beta^2\gamma+\frac{75}{2}\beta\gamma+\frac{245}{8}\gamma^3-3\gamma\right)\frac{r^3}{R^3}\right.$$
$$+\left(24\beta^3\gamma+\frac{225}{2}\beta^2\gamma^2+\frac{735}{4}\beta\gamma^3+\frac{6615}{64}\gamma^4-12\beta\gamma-\frac{75}{4}\gamma^2\right)\frac{r^4}{R^4}$$
$$+\left(48\beta^4\gamma+300\beta^3\gamma^2+490\beta^2\gamma^3+\frac{6615}{8}\beta\gamma^4+\frac{22869}{64}\gamma^5-36\beta^2\gamma-\frac{225}{2}\beta\gamma^2\right.$$
$$\left.\left.-\frac{735}{8}\gamma^3+3\gamma\right)\frac{r^5}{R^5}+\cdots\right]$$

(where $\gamma = \sin\theta\sin\chi$)

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}(\sin\theta\sin\chi)^{3/2}\left[1+(3\beta+3\gamma)\frac{r}{R}+\left(15\beta\gamma+\frac{75}{8}\gamma^2+\frac{15}{2}\beta^2-\frac{3}{2}\right)\frac{r^2}{R^2}\right.$$
$$+\left(\frac{105}{2}\beta^2\gamma+\frac{525}{8}\beta\gamma^2+\frac{35}{2}\beta^3+\frac{245}{8}\gamma^3-\frac{15}{2}\beta-\frac{15}{2}\gamma\right)\frac{r^3}{R^3}+\left(\frac{315}{2}\beta^3\gamma\right.$$
$$\left.+\frac{2205}{8}\beta\gamma^3+\frac{4725}{16}\beta^2\gamma^2+\frac{315}{8}\beta^4+\frac{6615}{64}\gamma^4-\frac{105}{2}\beta\gamma-\frac{105}{4}\beta^2-\frac{525}{16}\gamma^2+\frac{15}{8}\right)\frac{r^4}{R^4}$$
$$+\left(\frac{3465}{8}\beta^4\gamma+\frac{6615}{16}\beta\gamma^4+\frac{17325}{16}\beta^3\gamma^2+\frac{20335}{16}\beta^2\gamma^3+\frac{693}{8}\beta^5+\frac{22869}{64}\gamma^5\right.$$
$$\left.\left.-\frac{945}{4}\beta^2\gamma-\frac{4725}{16}\beta\gamma^2-\frac{315}{4}\beta^3-\frac{2205}{16}\gamma^3+\frac{105}{8}\beta+\frac{105}{8}\gamma\right)\frac{r^5}{R^5}+\cdots\right],$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}(\sin\theta\sin\chi)^{3/2}\left[1+3\frac{r}{R}\cos\theta\cos\chi+\frac{3}{8}\frac{r^2}{R^2}(5\cos^2\theta-1)(5\cos^2\chi-1)\right.$$
$$+\frac{5}{8}\frac{r^3}{R^3}(7\cos^3\theta-3\cos\theta)(7\cos^3\chi-3\cos\chi)$$
$$+\frac{15}{64}\frac{r^4}{R^4}(21\cos^4\theta-14\cos^2\theta+1)(21\cos^4\chi-14\cos^2\chi+1)$$
$$\left.+\frac{21}{64}\frac{r^5}{R^5}(33\cos^5\theta-30\cos^3\theta+5\cos\theta)(33\cos^5\chi-30\cos^3\chi+5\cos\chi)+\cdots\right],$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2} (\sin\theta \sin\chi)^{3/2} \left[\frac{2}{1\cdot 2} P_1'(\mu)\, P_2'(\mu) + \frac{2}{2\cdot 3} P_2'(\mu)\, P_2'(\lambda)\, \frac{r}{R} + \frac{2}{3\cdot 4} P_3'(\mu)\, P_3'(\lambda)\, \frac{r^2}{R^2}\right.$$
$$+ \frac{2}{4\cdot 5} P_4'(\mu)\, P_4'(\lambda)\, \frac{r^3}{R^3} + \frac{2}{5\cdot 6} P_5'(\mu)\, P_5'(\lambda)\, \frac{r^4}{R^4} + \frac{2}{6\cdot 7} P_6'(\mu)\, P_6'(\lambda)\, \frac{r^5}{R^5} + \cdots$$
$$\left. + \frac{2}{n(n+1)} P_n'(\mu)\, P_n'(\lambda)\, \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} + \cdots\right]$$

the general term being inferred from the nature of the first six terms, where $\mu = \cos\theta$, $\lambda = \cos\chi$ and P_n is *Legendre*'s polynomial of degree n.

Similarly,

$$\vartheta' = \vartheta\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2} (\sin\theta\sin\chi)^{3/2} \left[\frac{a^3}{r^3} + \frac{3\,a^5}{r^5}\frac{r}{R}\cos\theta\cos\chi\right.$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{a^7}{r^7}(5\cos^2\theta - 1)(5\cos^2\chi - 1)\cdot\frac{r^2}{R^2}$$
$$+ \frac{5}{8}\frac{a^9}{r^9}(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)(7\cos^3\chi - 3\cos\chi)\cdot\frac{r^3}{R^3}$$
$$+ \frac{15}{64}\frac{a^{11}}{r^{11}}(21\cos^4\theta - 14\cos^2\theta + 1)(21\cos^4\chi - 14\cos^2\chi + 1)\cdot\frac{r^4}{R^4}$$
$$\left. + \frac{21}{64}\frac{a^{13}}{r^{13}}(33\cos^5\theta - 30\cos^3\theta + 5\cos\theta)(33\cos^5\chi - 30\cos^3\chi + 5\cos\chi)\cdot\frac{r^5}{R^5} + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2} (\sin\theta\sin\chi)^{3/2} \left[\frac{2}{1\cdot 2}\frac{a^3}{r^3} P_1'(\mu)\, P_1'(\lambda) + \frac{2}{2\cdot 3}\frac{a^5}{r^5} P_2'(\mu)\, P_2'(\lambda)\,\frac{r}{R}\right.$$
$$+ \frac{2}{3\cdot 4}\frac{a^7}{r^7} P_3'(\mu)\, P_3'(\lambda)\frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{4\cdot 5}\frac{a^9}{r^9} P_4'(\mu)\, P_4'(\lambda)\frac{r^3}{R^3} + \frac{2}{5\cdot 6}\frac{a^{11}}{r^{11}} P_5'(\mu)\, P_5'(\lambda)\frac{r^4}{R^4}$$
$$\left. + \frac{2}{6\cdot 7}\frac{a^{13}}{r^{13}} P_6'(\mu)\, P_6'(\lambda)\frac{r^5}{R^5} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)}\frac{a^{2n+1}}{R^{2n+1}}\cdot P_n'(\mu)\, P_n'(\lambda)\cdot\frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} + \cdots\right]$$

$$\psi = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{m}{2\pi}(r\sin\theta)^{1/2}(R\sin\chi)^{1/2}\cdot(\vartheta - \vartheta')$$
$$= -\frac{1}{2} U r^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{m}{4}\frac{r^2}{R}\sin^2\theta\sin^2\chi\left[\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + 3\frac{r}{R}\cos\theta\cos\chi\left(1 - \frac{a^5}{r^5}\right)\right.$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{r^2}{R^2}(5\cos^2\theta - 1)(5\cos^2\chi - 1)\left(1 - \frac{a^7}{r^7}\right)$$
$$+ \frac{5}{8}\frac{r^3}{R^3}(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)(7\cos^3\chi - 3\cos\chi)\left(1 - \frac{a^9}{r^9}\right)$$
$$+ \frac{15}{64}\frac{r^4}{R^4}(21\cos^4\theta - 14\cos^2\theta + 1)(21\cos^4\chi - 14\cos^2\chi + 1)\left(1 - \frac{a^{11}}{r^{11}}\right)$$
$$+ \frac{21}{64}\frac{r^5}{R^5}(33\cos^5\theta - 30\cos^3\theta + 5\cos\theta)(33\cos^5\chi - 30\cos^3\chi + 5\cos\chi)\left(1 - \frac{a^{13}}{r^{13}}\right)$$
$$\left. + \cdots + \frac{2}{n(n+1)}\frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} P_n'(\mu)\, P_n'(\lambda)\cdot\left(1 - \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right) + \cdots\right]$$

$$\psi = -\frac{1}{2} U r^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$
$$+ \frac{m}{2}\sin^2\theta\sin^2\chi\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+1)}\frac{r^{n+1}}{R^n} P_n'(\mu)\, P_n'(\lambda)\cdot\left(1 - \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right) \qquad (r < R)\,.$$

If $r > R$, then expanding k^2 in powers of R/r, we can get a similar expression for ψ in powers of R/r.

From the value of ψ, gives by (2), the velocity potential Φ is given by

$$\Phi = -U r\cos\theta\left(1 + \frac{a^3}{2\,r^3}\right) + \frac{m}{2}\sin^2\chi\sum_1^\infty\frac{r^n\cdot P_n}{n\,R^n}\left(1 + \frac{n}{n+1}\frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right)\cdot P_n'(\lambda) \quad (r < R) \quad (3),$$

when

$$\psi = \frac{(1-\mu^2)}{n+1} r^{n+1} P_n'(\mu)\,, \qquad \Phi = r^n P_n\,,$$
$$\psi = -\frac{(1-\mu^2)}{n\,r^n} P_n'(\mu)\,, \qquad \Phi = \frac{P_n}{r^{n+1}}\,.$$

3. Calculation of resistance

Since $|P_n'(\mu)| \leq \frac{n(n+1)}{2}$ the series in ψ and Φ are uniformly convergent when $r < R$. Differentiating the series for Φ term by term with regard to time t and remembering that r and θ are constants with regard to time t, we have

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{r=a} = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n+1} \cdot a^n P_n \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{n R^n} \sin^2 \chi\right) \cdot P_n'(\lambda)$$

contribution by the term $\left(\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$ to the thurst along Ox is given by

$$x_\Phi = -\int_0^\pi \left(\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{r=a} \cdot 2\pi a^2 \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta,$$

$$= -\pi a^3 \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{R} \sin^2 \chi\right)$$

all the other terms vanish, because of the orthogonality relations

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) \, d\mu = 0, \qquad m \neq n$$

$$= \frac{2}{2n+1}, \qquad \text{when } m = n.$$

On the surface of the sphere, the radial and crossradial velocity components are given by

$$(v_r)_{r=a} = 0,$$

$$(v_\theta)_{r=a} = -\frac{3}{2} U \sin\theta + \frac{m}{2} \sin\theta \sin^2\chi \sum_1^\infty \frac{2n+1) a^{n-1}}{n(n+1) R^n} \cdot P_n'(\mu) P_n'(\lambda).$$

On the surface of the sphere, the resultant speed is given by

$$q^2 = ((v_\theta)_{r=a})^2 = \frac{9}{4} U^2 \sin^2\theta + \frac{m^2}{4} \sin^2\theta \sin^4\chi \left\{\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{a^{n-1}}{R^n} \cdot P_n'(\mu) P_n'(\lambda)\right\}^2$$

$$-\frac{3 m U \sin^2\theta \sin^2\chi}{2} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{a^{n-1}}{R^n} \cdot P_n'(\mu) P_n'(\lambda).$$

Contribution by the term $\left(c - \frac{1}{2} \varrho q^2\right)$ to the thurst along Ox is given by

$$X_s = -\int_0^\pi \left(c - \frac{1}{2} \varrho q^2\right) \cdot 2\pi a^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta$$

$$= \pi a^2 \varrho \int_0^\pi q^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta$$

$$= \pi a^2 \varrho \left[m^2 \cdot \sin^4\chi \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a^{2n-1}}{R^{2n-1}} \cdot P_n'(\lambda) P_{n+1}'(\lambda) - \frac{3 m U a \sin^2\chi \cdot \cos\chi}{R^2}\right].$$

(Using the results

$$\int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) P_n'^2(\mu) \cdot d\mu = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{+1} \mu (1-\mu^2) P_m'(\mu) P_n'(\mu) \, d\mu = 0, \qquad \text{when } n \neq m+1,$$

when $n = m + 1$,

$$\int_{-1}^{+1} \mu (1-\mu^2) P_m'(\mu) P_{m+1}'(\mu) \cdot d\mu = 2m(m+1)(m+2)/(2m+1)/(2m+3).$$

(Ref. Whittaker and Watson, Modern Analysis, 1927 Edn.))

Total resistance along Ox is given by

$$X = X_\Phi + X_s = -\pi a^3 \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{R} \sin^2\chi\right)$$

$$+ \pi a^2 \varrho \left[-\frac{3 m U a \sin^2\chi \cos\chi}{R^2} + m^2 \sin^4\chi \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a^{2n-1}}{R^{2n+1}} \cdot P_n'(\lambda) \cdot P_{n+1}'(\lambda)\right].$$

(R, χ) is a singularity of stream function ψ, to calculate the velocity of the filament, we omit from ψ the part due to filament itself and write the new stream function as

$$\psi' = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) - \frac{m}{2} \sin^2\theta \sin^2\chi \sum_n^\infty \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{a^{2n+1}}{r^n \cdot R^n} P_n'(\mu) P_n'(\lambda) \qquad (r < R)$$

the radial and cross-radial velocity components of A due to ψ' are given by

$$V_R = \left(-\frac{\partial\psi'/\partial\theta}{r^2 \sin\theta}\right)_{\substack{r=R\\ \theta=\chi}} = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_{\substack{\mu=\lambda\\ r=R}} = U\left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right)\cos\chi + \frac{m}{2}\sin^2\chi \sum_1^\infty \frac{a^{2n+1}}{R^{2n+1}} P_n(\lambda) P_n'(\lambda),$$

$$V_\chi = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial r}\right)_{\substack{r=R\\ \theta=\chi}} = -U\left(1 + \frac{a^3}{2R^3}\right)\sin\chi + \frac{m}{2}\sin^3\chi \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a^{2n+1}}{R^{2n+2}} \cdot P_n'^2(\lambda).$$

Since the velocity of the vortex (regarded as a line filament) due to itself is undefined, we define the velocity of the vortex (regarded as a ring of small cross-section) as

$$-\frac{m}{4\pi\eta}\left(\log\frac{8\eta}{\epsilon} - \frac{3}{4}\right) \quad \| \, Ox,$$

where η = radius of the central filament,
ϵ = radius of the cross-section.
(Ref. N. N. Sen, 1920—21).

at A, the radial and cross-radial velocity components are given by

$$\dot R = -\frac{m}{4\pi\eta}\left(\log\frac{8\eta}{\epsilon} - \frac{3}{4}\right)\cos\chi + U\left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right)\cos\chi + \frac{m\sin^2\chi}{2R}\sum_1^\infty \left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} \cdot P_n(\lambda) P_n'(\lambda),$$

$$R\dot\chi = \frac{m}{4\pi\eta}\left(\log\frac{8\eta}{\epsilon} - \frac{3}{4}\right)\sin\chi - U\left(1 + \frac{a^3}{2R^3}\right)\sin\chi + \frac{m\sin^3\chi}{2R}\sum_1^\infty \frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} \cdot P_n'^2(\lambda),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2\chi}{R}\right) = \frac{2\sin\chi\cos\chi}{R}\dot\chi - \frac{\sin^2\chi}{R^2}\dot R = \frac{3m}{4\pi\eta}\left(\log\frac{8\eta}{\epsilon} - \frac{3}{4}\right)\frac{\sin^2\chi\cos\chi}{R^2} - \frac{3U\sin^2\chi\cos\chi}{R^2}$$
$$+ \frac{3m\sin^4\chi\cos\chi}{2R^3}\sum_1^\infty \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} \cdot P_n'^2(\lambda)$$
$$- \frac{m\sin^4\chi}{2R^3}\sum_1^\infty \frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} \cdot P_n'(\lambda) P_{n+1}'(\lambda).$$

Total resistance along Ox is given by

$$X = -\pi a^3 \varrho \left[\frac{3m^2}{4\pi\eta}\left(\log\frac{8\eta}{\epsilon} - \frac{3}{4}\right)\frac{\sin^2\chi\cos\chi}{R^2}\right.$$
$$- \frac{m^2\sin^4\chi}{R^3}\left(1 + \frac{a^3}{2R^3}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2n-2} \cdot P_n'(\lambda) P_{n+1}'(\lambda)$$
$$\left. + \frac{3m^2\sin^4\chi\cos\chi}{2R^3}\sum_1^\infty \frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} \cdot P_n'^2(\lambda)\right].$$

Lastly, I wish to thank Dr. B. S. Roy, for his helpful advice in the preparation of the paper.

4. References

[1] Modern Developments in Fluid Dynamics, Edited by S. Goldstin (1952).
[2] Jefferys, Wake in fluid flow past a solid. Proc. Roy Soc., Ser. A, 128, p. 376—393.
[3] H. Levy and A. G. Forsdyke, The stability of an infinite system of circular vortices. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 114 (1927).
[4] Lamb, Hydrodynamics. Sixth Edition, p. 237.
[5] Milne-Thompson, Theoretical Hydrodynamics (1955).
[6] W. G. Bickley, The influence of vortices upon the resistance experienced by solids moving through a liquid. Proc. Roy Soc., Ser. A, 119 (1928).
[7] Whittaker and Watson, Modern Analysis (1927) Edn., p. 230.
[8] N. N. Sen, On circular vortex rings of finite section in an incompressible fluid. Bull. Cal. Math. Soc., Vol. 12 (1920—21), p. 117—140.

Manuskripteingang: 17. 2. 1958

Anschrift: Dr. M. K. Mitra, 33/2A Wellesley Street (Flat No. 2), Calcutta 16 (Indien)

Die zweidimensionale Fourieranalyse spezieller Koppelkurven*)

Von W. *Meyer zur Capellen*

Während bereits die Harmonische Analyse der Bewegungsgleichungen von Getriebegliedern wertvolle Ergebnisse für die Beurteilung der Gelenkgetriebe, vor allem in Hinblick auf die Dynamik, gebracht hat, wird jetzt auch die Analyse der Bewegungskomponenten von Koppelkurven durchgeführt, die u. a. für die Untersuchung von Schwerpunktsbahnen wichtig ist. Diese Analyse bedeutet im wesentlichen die Aufstellung der Fourier-Reihen für den cosinus und den sinus des Koppelwinkels. Die Koeffizienten folgen aus der Form und den Abmessungen des Getriebes und stehen in bestimmter Beziehung zueinander. Einige Sonderfälle führen zu besonders einfachen Ergebnissen.

The advantages of Harmonic Analysis in respect of Kinematic Linkages having been already established especially from the dynamical point of view, the analysis is now further extended and applied to the components of coupling rod curves, for example to determine the locus of the centre of mass. The analysis to be carried out consists essentially in establishing the Fourier Series for the cosine and sine values of the coupling rod angle. These coefficients follow from the type and dimensions of the linkage and are mutually correlated. Some special cases lead to extremely simple solutions.

L'analyse harmonique des équations de mouvement des éléments de mécanismes à manivelle ayant donné d'importants résultats dans la critique des quadrilatères articulés, du point de vue de la dynamique avant tout, on est aujourd'hui en mesure de réaliser l'analyse des composantes des courbes décrites par les points situés dans le plan de la bielle. Cette analyse est importante dans l'étude des courbes décrites par le centre de gravité. L'essentiel de cette analyse est l'établissement des séries de Fourier pour le cosinus et le sinus de l'angle formé par la bielle et le plan fixe. Les coefficients résultent de la forme du mécanisme et de ses dimensions et ils ont une relation déterminée entre eux. Quelques cas spéciaux donnent des résultats pariculièrement simples.

Гармонический анализ уравнений движения звеньев механизмов дал ценные результаты для обсуждения шарнирных механизмов, главным образом с точки зрения динамики. Теперь проводится также и анализ составляющих движения кривых сцепления, важный между прочим для исследования траекторий центра тяжести. Этот анализ в основном сводится к составлению рядов Фурье для синуса и косинуса угла сцепления. Коэффициенты получаются из вида и размеров механизма и связаны определенными соотношениями. Некоторые частные случаи дают особенно простые результаты.

Daß die harmonische Analyse für die Dynamik nicht nur des zentrischen Schubkurbeltriebes, sondern auch jeder Gelenkkette wichtig ist, wurde bereits 1940 am Beispiel der Kurbelschwinge erwähnt [7]. Da hierbei die harmonische Analyse der Abtriebsbewegung besonders wichtig in Hinblick auch auf die Bewegungscharakteristik und auf die Getriebesynthese erschien, wurde für eine Reihe spezieller ebener und räumlicher Getriebe die harmonische Analyse rechnerisch durchgeführt [4], [10], [12], [13], [14], [16—21], aber für den allgemeinen Kurbeltrieb (Kurbelschwinge oder Doppelkurbel) wegen der langwierigen rechnerischen Auswertung ein Analogiegerät gebaut, das beiläufig auch die Bewegungsgesetze selbst liefert [23], ferner ein im wesentlichen elektrisch arbeitendes Gerät, das besonders zur Untersuchung von Mehrgelenkketten dient [3].

Bei dynamischen Untersuchungen benötigt man aber auch die Bewegungskomponenten und ihre harmonische Analyse [4], [14], darüber hinaus ist diese noch für die Getriebesynthese nützlich, wie bereits Wunderlich für zyklische Kurven zeigte [24][1]).

1. Die zyklischen Kurven

Gemäß Bild 1 und 2 liest man für den Ortsvektor $\mathfrak{z} = \overrightarrow{A_0 K}$ mit $R_0 = n\,R$ und $\overline{A\,K} = p$ unmittelbar ab:

$$\mathfrak{z} = (R_0 - R)\,e^{i\alpha} + p\,e^{i\gamma} \quad \text{(Hypozykloide)}, \quad \gamma = -(n-1)\,\alpha \quad \text{(1a)},$$

bzw.

$$\mathfrak{z} = (R_0 + R)\,e^{i\alpha} + p\,e^{i\gamma} \quad \text{(Epizykloide)}, \quad \gamma = (n+1)\,\alpha \quad \text{(1b)},$$

so daß in Komponenten oder Parameterform

$$x = A_{x1}\cos\alpha + A_{xm}\cos m\,\alpha \quad \text{(2a)},$$

$$y = B_{x1}\sin\alpha + B_{xm}\sin m\,\alpha \quad \text{(2b)}$$

geschrieben werden kann, wenn im ersten Fall $A_{x1} = B_{x1} = R_0 - R$, $A_{xm} = -B_{xm} = p$ $m = (n-1)$ und im zweiten Fall $A_{x1} = B_{x1} = R_0 + R$, $A_{xm} = B_{xm} = p$, $m = (n+1)$ gesetzt wird. Gemäß diesen Gln. 2 sind dann x und y in einfacher Weise je durch eine *Fourier*-Reihe dargestellt[2]).

*) Herrn Prof. Dr. Alwin Walther, Darmstadt, zu seinem 60. Geburtstag.

[1]) Vgl. auch [1] und das Referat in VDI-Z. 92 (1950) S. 870, wenn auch bei de Beauclair der Begriff „mehrdimensionale *Fourier*synthese" in anderer Weise verstanden wird.

[2]) Für $n = 2$ ergeben sich im ersten Fall die Ellipsen, für $n = 1$ im zweiten Fall die *Pascal*schen Kurven.

Wunderlich [24], [25] überlagert nun den Gln. 2 noch eine weitere „Schwingung", kommt damit zu den „höheren" Radkurven und benutzt diese zur Synthese, und zwar zur Darstellung des „Vierecks mit abgerundeten Ecken" [5]: Die für $n = 4$ und $\lambda = p/R = 1/(n-1) = 1/3$ gewonnene Epizykloide[3]) weist zwar die Form eines Vierecks mit abgerundeten Ecken auf, aber die „geradlinigen" Stücke sind relativ kurz. Und um diese „Geradführung" zu verbessern, d. h. um sich nicht nur auf eine vierpunktige Berührung zwischen Kurve und Tangente zu beschränken, wird in Gl. 2 noch ein weiteres Glied hinzugenommen.

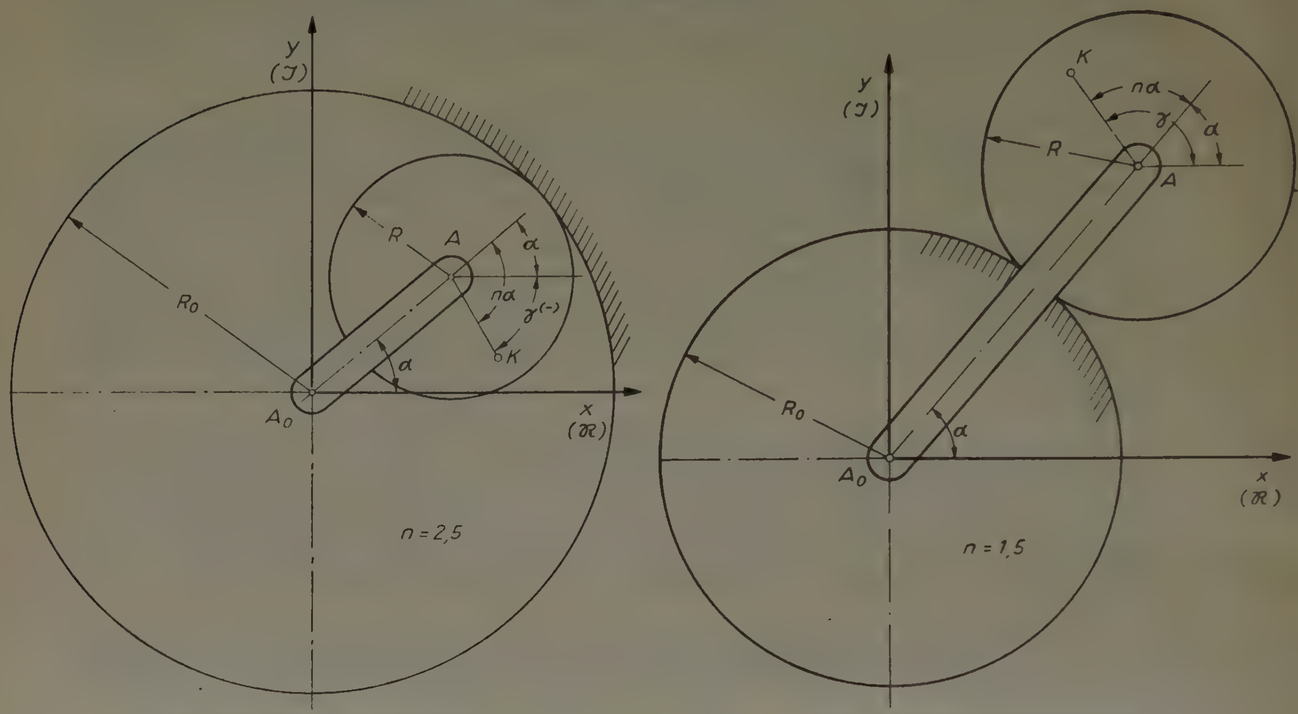


Bild 1. Gegenläufiger Umlaufrädertrieb

Bild 2. Gleichläufiger Umlaufrädertrieb

Man könnte infolgedessen in Fortführung dieser Überlegungen jede geschlossene Kurve durch eine zweidimensionale *Fourier*-Analyse bzw. *Fourier*-Reihe darstellen, d. h. für den Vektor eines bewegten Punktes K, der die betrachtete Bahn beschreibt, in Fortführung von Gl. 2 den Ansatz machen

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \sum_{m=1,2,\ldots} \mathfrak{z}_m = \mathfrak{z}_0 + \sum_{m=1,2,\ldots} r_m e^{i m \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

worin $\mathfrak{z}_0$ einen festen Ortsvektor bedeutet und r_m die Amplitude der m-ten Kreisschwingung $\mathfrak{z}_m = r_m e^{i m \alpha}$ bedeutet, oder in Komponentenform, wobei jetzt m immer positiv, r_m aber gegebenenfalls auch negativ sei,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sum x_m \cos m\alpha\,, \\ y &= y_0 + \sum y_m \sin m\alpha\,, \end{aligned} \qquad m = 1, 2, \ldots \quad \ldots \ldots \ldots (4),$$

worin dann x_m bzw. y_m die *Fourier*-Koeffizienten und x_0 bzw. y_0 die konstanten Glieder darstellen.

2. Die Koppelkurven

2.1. Der Ortsvektor

Der Kurbeltrieb sei gemäß Bild 3 in die komplexe Zahlenebene eingebettet, und es sei A_0A die Kurbel und ferner $A_0A = a$, $AB = c$, $B_0B = b$, $A_0B_0 = d$, Antriebswinkel $B_0A_0A = \alpha$, Abtriebswinkel $xB_0B = \beta$ und der Koppelwinkel, d. h. der Winkel, den die Koppelmittellinie BA mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, gleich γ gesetzt. Der Koppelpunkt K habe in dem mit der bewegten Koppelebene verbundenen Koordinatensystem die Koordinaten u und v [15] bzw. r und ψ. Zur Vereinfachung wird unten auch noch β durch $\pi - \overline{\beta}$ ersetzt.

Dann liest man für den Vektor $\overrightarrow{A_0K} = \overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AK}$ sofort ab:

$$\mathfrak{z} = a\,e^{i\alpha} + u\,e^{i\gamma} + v\,e^{i(\gamma+\pi/2)} = a\,e^{i\alpha} + u\,e^{i\gamma} + i\,v\,e^{i\gamma} \quad \ldots \ldots (4a)$$

[3]) Vgl. a. [6] und [22].

oder

$$\mathfrak{z} = a\, e^{i\alpha} + r\, e^{i(\gamma+\psi)} \quad \ldots \quad (4b).$$

2.2. Funktionsgleichungen für den Koppelwinkel

In der vorstehenden Gleichung ist γ eine durch die Maße des Getriebes bestimmte Funktion des Kurbelwinkels α. Schreibt man die Gleichung des Getriebes in der Form

$$a\, e^{i\alpha} + c\, e^{i\gamma} - b\, e^{i\beta} = d \quad \ldots \quad (5)$$

hin [2, 11] und eliminiert aus den beiden Komponentenformen den Winkel β, so erhält man nach einfachen Umformungen für die genannte Funktion $F(\alpha, \gamma) = 0$ die Form

$$P \cos\gamma - Q \sin\gamma - R = 0 \quad \ldots \quad (6a),$$

worin

$$P = d - a\cos\alpha\,, \quad Q = a\sin\alpha\,, \quad R = (f^2 + c^2 - b^2)/2\,c \quad \ldots \quad (6b)$$

und

$$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2\,a\,d\cos\alpha} \quad \ldots \quad (6c)$$

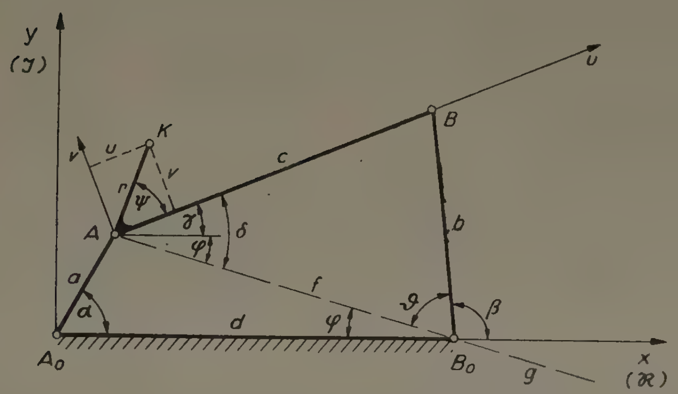


Bild 3. Beziehungen am Kurbeltrieb mit Koppelpunkt

die veränderliche Strecke $f = \overline{AB_0}$ darstellt, Bild 3. Man kann aber dieser Gleichung auch eine unmittelbare Deutung geben, wenn man die Winkel $\varphi = \sphericalangle\, A_0B_0A$ und $\delta = \sphericalangle\, B_0AB$, einführt. Es ist dann

$$\gamma = \delta - \varphi \quad \ldots \quad (7a),$$

worin δ nach dem Kosinus-Satz, d. h. aus

$$\cos\delta = (f^2 + c^2 - b^2)/2\,f\,c = f/2\,c + (c^2 - b^2)/2\,f\,c \quad \ldots \quad (7b),$$

leicht berechnet werden kann, evtl. mit Hilfe eines Nomogrammes [9] und schließlich wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sin\alpha}{a - d\cos\alpha} = \frac{\lambda\sin\alpha}{1 - \lambda\cos\alpha}\;{}^{4)} \quad \ldots \quad (7c).$$

Hierbei stellt aber φ nichts anderes als den Schleifenwinkel einer zugeordneten zentrischen Kurbelschleife mit $\lambda = a/d$ dar, wenn man beachtet, daß dieser ja durch Gleiten der Geraden g (Bild 3) durch den Punkt B_0 entsteht [12], [20]. Dreht man beiläufig A_0A um A bei Festhaltung von Punkt A und der Geraden g, so hat man einen Schubkurbeltrieb, an dessen geradgeführtem Punkt B_0 eine Schubschwinge B_0BA angeschlossen ist.

In Sonderfällen vereinfachen sich die Gln. 6 oder 7, wie unten nochmals benutzt wird. Für $b = c$ hat man eine besondere Vereinfachung, ebenso für $a = b$ und $c = d$, wobei $\cos\delta = \cos\varphi$, d. h. $\delta = \varphi$, $\gamma = 0$ (Parallelkurbeltrieb) oder $\delta = -\varphi$, $\gamma = -2\,\varphi$ (Antiparallelkurbeltrieb) ist, in Übereinstimmung mit [16].

2.3. Die Funktionsgleichung für den Winkel β

Eliminiert man aus den beiden Komponentenformen von Gl. (5) den Winkel γ, so erhält man unter Ersatz von β durch $\pi - \bar\beta$ eine ähnliche Gleichung $G(\alpha, \beta) = 0$ wie oben[5]):

$$P\cos\bar\beta + Q\sin\bar\beta - T = 0 \quad \ldots \quad (8a),$$

[4]) Auch leicht durch ein Nomogramm darzustellen.

[5]) Dies sei hier der Vollständigkeit halber angegeben; beiläufig gilt auch noch

$$f^2 = c^2 + b^2 + 2\,b\,c\cos(\delta + \vartheta)\,.$$

wobei P und Q aus Gl. (6b) folgen, worin ferner

$$T = (f^2 + b^2 - c^2)/2\,b \quad \text{(8b)}$$

gesetzt ist und f wieder aus Gl. (6c) folgt.

Ähnlich wie oben kann geschrieben werden

$$\bar{\beta} = \varphi + \vartheta \quad \text{(9a),}$$

worin ϑ den Winkel AB_0B bedeutet (Bild 3) und aus

$$\cos\vartheta = \frac{f^2 + b^2 - c^2}{2\,f\,b} = \frac{f}{2\,b} + \frac{b^2 - c^2}{2\,f\,b} \quad \text{(9b)}$$

folgt.

2.4. Die harmonische Analyse bei der Koppelkurve

2.4.1. Allgemeiner Ansatz. Mit den Gleichungen (4) wird man hier im allgemeinen nicht auskommen, denn in der x-Komponente vermißt man die sinus-Glieder, in der y-Komponente die cosinus-Glieder. Man muß infolgedessen zu einem allgemeineren Ansatz greifen, d. h. zur Darstellung

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{x0} + \sum A_{xm}\cos m\alpha + \sum B_{xm}\sin m\alpha\,, \\ y &= A_{y0} + \sum A_{ym}\cos m\alpha + \sum B_{ym}\sin m\alpha\,, \end{aligned}\quad m = 1, 2, 3, \ldots\right\} \quad \text{(10).}$$

Im Ansatz nach Gl. (4) wird somit

$$x_0 = A_{x0}, \quad y_0 = A_{y0}, \quad x_m = A_{xm}, \quad y_m = B_{ym} \quad \text{und} \quad B_{xm} = A_{ym} = 0\,.$$

Um nun aus Gl. (10) wieder zu einer vektoriellen Form zu kommen, werde in Anlehnung an [14] der x-Achse aus Bild 3 der Einheitsvektor $\mathfrak{i}$, der y-Achse der Einheitsvektor $\mathfrak{j}$ zugeordnet, so daß ein Punkt K durch den Vektor $\mathfrak{z} = \mathfrak{i}\,x + \mathfrak{j}\,y$ dargestellt ist. Bildet man diesen aus den Gln. (10), so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z} &= \mathfrak{z}_0 + \sum \mathfrak{z}_{cm}\cos m\alpha + \sum \mathfrak{z}_{sm}\sin m\alpha\,, \\ &= \mathfrak{z}_0 + \sum \mathfrak{z}_m\,, \qquad m = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{(11).}$$

Dabei stellt $\mathfrak{z}_0$ einen festen Punkt dar, $\mathfrak{z}_{cm}\cos m\alpha$ eine lineare Schwingung von der Amplitude $z_{cm} = |\mathfrak{z}_{cm}|$ und der Richtung des Vektors $\mathfrak{z}_{cm}$, entsprechend $\mathfrak{z}_{sm}\sin m\alpha$ eine lineare, um $\pi/2$ phasenverschobene Schwingung von der Amplitude $z_{sm} = |\mathfrak{z}_{sm}|$ und bilden beide zusammen eine elliptische Schwingung, deren konjugierte Durchmesser $\mathfrak{z}_{cm}$ und $\mathfrak{z}_{sm}$ sind. Setzt man $\alpha = \omega_1 t$, so sind die Frequenzen der Schwingungen durch $m\,\omega_1/2\,\pi$ gegeben. Über die Ellipse der Grundschwingung vom Mittelpunkt $\mathfrak{z}_0$ überlagern sich also die elliptischen Schwingungen höherer Frequenz und approximieren die gegebene Kurve[6]).

Die Vektoren $\mathfrak{z}_{cm}$, $\mathfrak{z}_{sm}$ und $\mathfrak{z}_0$ werden aus den Komponenten gemäß

$$\mathfrak{z}_{cm} = \mathfrak{i}\,A_{xm} + \mathfrak{j}\,A_{ym}, \quad \mathfrak{z}_{sm} = \mathfrak{i}\,B_{xm} + \mathfrak{j}\,B_{ym}, \quad \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{i}\,A_{x0} + \mathfrak{j}\,A_{y0}$$

gewonnen.

2.4.2. Die Komponenten-Koeffizienten. Da hier nur drehfähige Getriebe betrachtet werden, hat man sich nur auf die Koppelkurven der Kurbelschwinge und der Doppelkurbel zu beschränken, denn nach dem Satz von *Roberts* [2], [11] kann die Koppelkurve der drehfähigen Doppelschwinge auch durch zwei Kurbelschwingen erzeugt werden. Schreiben wir Gl. (4a) in Komponentenform, d. h.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\alpha + u\cos\gamma - v\sin\gamma\,, \\ y &= a\sin\alpha + u\sin\gamma + v\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{(12),}$$

so zeigt der Vergleich mit Gl. (10), daß es genügt, die Werte $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ harmonisch zu analysieren, d. h. zu setzen [4], [14]:

$$\left.\begin{aligned} \cos\gamma &= \xi = A_{\xi 0} + \sum A_{\xi m}\cos m\alpha + \sum B_{\xi m}\sin m\alpha\,, \\ \sin\gamma &= \eta = A_{\eta 0} + \sum A_{\eta m}\cos m\alpha + \sum B_{\eta m}\sin m\alpha\,, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{(13).}$$

[6]) Diese Überlegungen erinnern an die Bahnen der Himmelskörper. — Da beiläufig eine Ellipse auch mit einem Kardankreispaar erzeugt werden kann, vgl. Gl. 1 für $n = 2$, d. h. durch Kreisschwingungen gleicher Frequenz mit entgegengesetztem Drehsinn, so können auch die einzelnen Ellipsen aus verschiedenen Kreisschwingungen mit gewissen Phasenverschiebungen entstanden gedacht werden. — Im übrigen wurden Ansätze ähnlicher Art auch von O. Tolle in einem Vortrag gemacht, erschienen in VDI-Berichte Bd. 29 (1958), S. 45.

Damit schreiben sich die in Gl. (10) angegebenen Koeffizienten

$$\left.\begin{array}{l} A_{x0} = u\,A_{\xi 0} - v\,A_{\eta 0}\,, \quad A_{y0} = u\,A_{\eta 0} + v\,A_{\xi 0}\,, \\ A_{x1} = a + u\,A_{\xi 1} - v\,A_{\eta 1}\,, \quad A_{xm} = u\,A_{\xi m} - v\,A_{\eta m}\,, \quad m = 2, 3, \ldots, \\ A_{ym} = u\,A_{\eta m} + v\,A_{\xi m}\,, \quad m = 1, 2, \ldots, \\ B_{xm} = u\,B_{\xi m} - v\,B_{\eta m}\,, \quad m = 1, 2, \ldots; \quad B_{y1} = a + u\,B_{\eta 1} + v\,B_{\xi 1}\,, \\ B_{ym} = u\,B_{\eta m} + v\,B_{\xi m}\,, \quad m = 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots (14),$$

und es lassen sich damit die Vektoren $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_{cm}$, $\mathfrak{z}_{sm}$ z. B. wieder in komplexer Darstellung angeben:

$$\mathfrak{z}_0 \;\;= r\,[A_{\xi 0}\,e^{i\varphi} + A_{\eta 0}\,e^{i(\varphi+\pi/2)}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15a),$$

$$\mathfrak{z}_{cm} = r\,[A_{\xi m}\,e^{i\varphi} + A_{\eta m}\,e^{i(\varphi+\pi/2)}] + \mathfrak{w}_c \quad \ldots \ldots \ldots (15b),$$

$$\mathfrak{z}_{sm} = r\,[B_{\xi m}\,e^{i\varphi} + B_{\eta m}\,e^{i(\varphi+\pi/2)}] + \mathfrak{w}_s \quad \ldots \ldots \ldots (15c),$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$. Hierbei sind $\mathfrak{w}_c$ und $\mathfrak{w}_s$ gleich Null für alle $m > 1$, und für $m = 1$ gilt

$$\mathfrak{w}_c = a\,e^{i\,2\pi} = a\,e^{i\cdot 0}, \qquad \mathfrak{w}_s = a\,e^{i\pi/2} \quad \ldots \ldots \ldots (15d).$$

2.4.3 Beziehungen zwischen gewissen Koeffizienten. Integriert man die Gl. (6a) in den Grenzen $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$, d. h. für eine Periode, so ergibt sich, da bekanntlich

$$A_{\xi 0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi\,d\alpha\,, \quad A_{\xi 1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \xi\cos\alpha\,d\alpha \quad \text{und} \quad B_{\eta 1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \eta\sin\alpha\,d\alpha$$

ist mit $a/d = \lambda$:

$$2\,A_{\xi 0} - (A_{\xi 1} + B_{\eta 1}) = \frac{a^2 + d^2 + c^2 - b^2}{c\,d} \quad \ldots \ldots \ldots (16).$$

Multipliziert man Gl. (6a) weiterhin mit $\cos m\alpha$ und $\sin m\alpha$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, und integriert in den Grenzen $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$, so folgt auch

$$2\,A_{\xi m} - [A_{\xi(m+1)} + A_{\xi(m-1)}] - [B_{\eta(m+1)} - B_{\eta(m-1)}] = 0 \quad \ldots \ldots (17a),$$

$m = 2, 3, \ldots;$

$$2\,A_{\xi 1} - 2\lambda\,A_{\xi 0} - A_{\xi 2} - B_{\eta 2} = -\;2\,a/c \quad \ldots \ldots \ldots (17b);$$

$$2\,B_{\xi 1} - 2\lambda\,A_{\eta 0} - \lambda\,B_{\xi 2} + \lambda\,A_{\eta 2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17c);$$

$$2\,B_{\xi m} - \lambda\,[B_{\xi(m+1)} + B_{\xi(m-1)}] + \lambda\,[A_{\eta(m+1)} - A_{\eta(m+1)}] = 0 \quad \ldots (17d),$$

$m = 2, 3, \ldots$.

Es sei noch bemerkt, daß gewisse dieser Koeffizienten auch bei Berechnung des Flächeninhaltes von Koppelkurven eine Rolle spielen [15].

2.4.4. Ermittlung der Koeffizienten. Die *Fourier*-Koeffizienten für ξ und η können in besonderen Fällen, wie unten gezeigt wird, leicht rechnerisch gefunden werden.[7]) In komplizierteren Fällen — und das ist bei den Koppelkurven im allgemeinen so — genügt es, die x- und die y-Komponente eines Punktes der Koppelmittellinie (u. a. auch des Punktes B) als Funktionen von α entweder instrumentell mit einem Analysator oder rechnerisch nach einem Rechenschema zu analysieren, da ja für einen solchen Punkt doch $x = a\cos\alpha + u\cos\gamma$, bzw. $y = a\sin\alpha + u\sin\gamma$ gilt. Ebenso kann man auch die x-Komponente eines Punktes der u-Achse und eines Punktes der v-Achse benutzen, da ja für den letzteren doch $x = a\cos\alpha - v\sin\gamma$ wird. Diese Komponenten lassen sich instrumentell aber leicht mit einem von E. Lenk [3] entworfenen Gerät ermitteln, also auch bei beliebigen Getrieben.

25. Sonderfälle

2.5.1. Die Schubkurbel. Hier gehen B_0 und damit b und d nach unendlich, aber es bleibt $d - b$ endlich. Schreibt man in Gl. (7b) $d^2 - b^2 = (d - b)\,(d + b) = e\,(d + b)$, so erhält man beim Grenzübergang in bekannter Weise [14] $\cos\delta = e/c - (a/c)\cdot\cos\alpha$ und $\varphi = 0$, da $\lambda = a/d$ nach Null geht, vgl. auch Bild 4, so daß $\gamma = \delta$ wird. Damit gilt $A_{\xi 0} = e/c$, $A_{\xi 1} = -a/c$, während alle $A_{\xi m}$ für $m > 1$ und alle $B_{\xi m}$ verschwinden — in Übereinstimmung mit Gl. (17). Die für die Entwicklung von $\sin\delta = \sin\gamma$ notwendigen Werte sind an anderer Stelle angegeben [4], [14], so daß sich eine Wiederholung erübrigt. Dort [14] wird aber der Winkel α von der Parallelen zur Geradführung durch A_0 aus gerechnet, vgl. Bild 4 sowie Bild 5 mit der Zusammensetzung der einzelnen Vektoren aus [14]. Bei der kinematischen Umkehrung, der geschränkten

[7]) Auch bei gleichschenkligen Getrieben treten, wie eine noch unveröffentlichte Arbeit zeigt, merkbare Vereinfachungen auf.

Kurbelschleife [21], geht B und damit c und b nach unendlich und bleibt $c - b = e$ endlich, so daß $\cos\delta = e/d$ wird und Gl. (16) z. B. auf $2\,A_{\xi 0} - \lambda\,(A_{\xi 1} + B_{\xi 1}) = 2\,e/d$ führt. Da hierüber an anderer Stelle berichtet wird [21], sei hier, zumal sich langwierige rechnerische Entwicklungen ergeben, darauf verzichtet und dafür auf zwei Gruppen von Koppelkurven mit besonders einfachen Entwicklungen eingegangen.

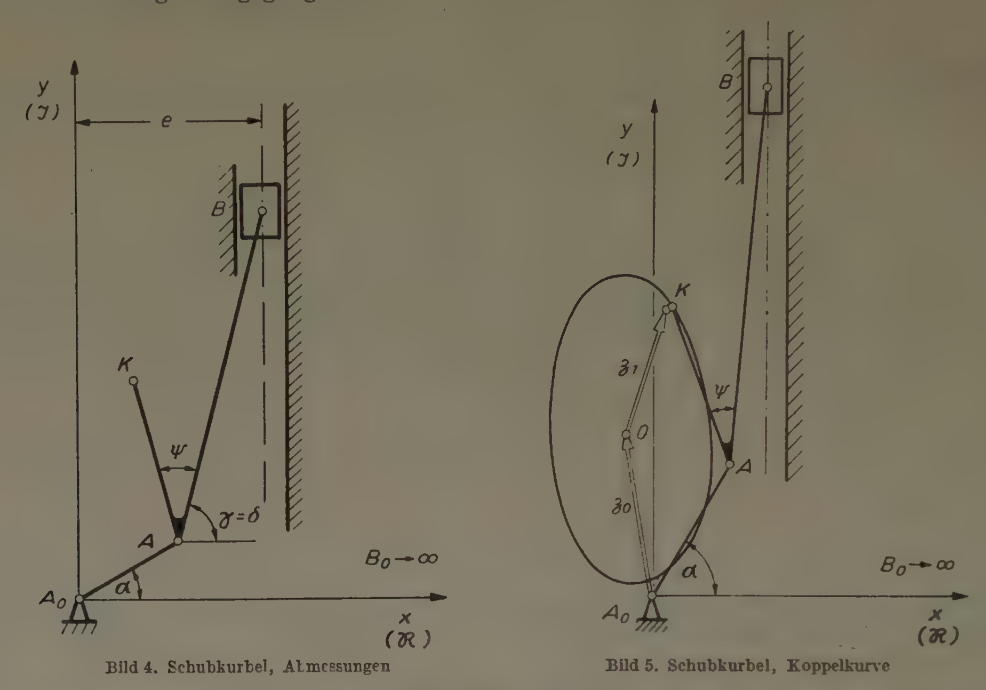


Bild 4. Schubkurbel, Abmessungen Bild 5. Schubkurbel, Koppelkurve

2.5.2. Der gegenläufige Antiparallelkurbeltrieb [8]. Hier sind wie bei der Schubkurbel die Koppelkurven vierter Ordnung und gemäß Bild 6 liest man in ähnlicher Weise, wie für den Winkel β des Abtriebes gezeigt wurde [16], für den Koppelwinkel unmittelbar oder auch aus Gl. (7b), wie oben bereits erwähnt, $\gamma = -2\,\varphi$ ab. Damit hat man $\cos\gamma = \cos 2\,\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und da, vgl. auch Bild 3, $f\sin\varphi = a\sin\alpha$, $f\cos\varphi = d - a\cos\alpha$ wird, folgt schließlich

$$\cos\gamma = \frac{1 - \lambda^2 - 2\,\lambda\cos\alpha + 2\,\lambda^2\cos^2\alpha}{1 + \lambda^2 - 2\,\lambda\cos\alpha}.$$

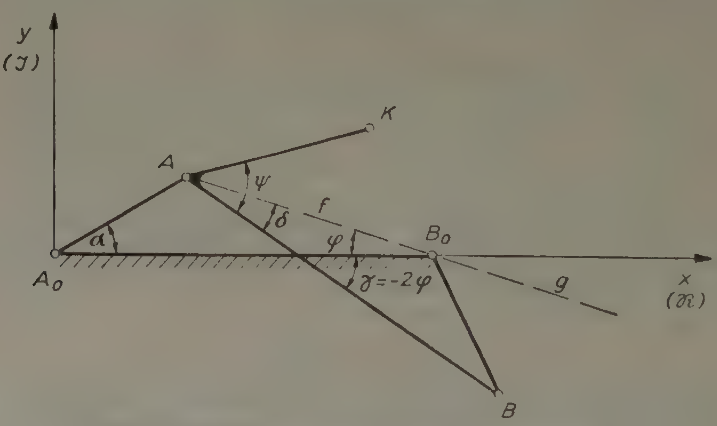


Bild 6. Gegenläufiger Antiparallelkurbeltrieb, Abmessungen

Diese in $\cos\alpha = v$ unecht gebrochene rationale Funktion läßt sich aber auch

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}\,(1 - \lambda^2) - \lambda\cos\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{(1 - \lambda^2)^2}{1 + \lambda^2 - 2\,\lambda\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

schreiben. Nun wurde für das Übersetzungsverhältnis $i_s = d\varphi/d\alpha$ einer zentrischen, schwingenden Kurbelschleife, d. h. bei $\lambda < 1$ die Entwicklung [12], [18]

$$i_s = \frac{\lambda\,(\cos\alpha - \lambda)}{1 + \lambda^2 - 2\,\lambda\cos\alpha} = \sum_{m=1,2,\ldots} \lambda^m \cos m\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

gegeben, woraus auch durch Umformung

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\alpha} = 1 + 2\,i_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

folgt. Setzt man Gl. 20 und die *Fourier*-Reihe gemäß Gl. 19 in Gl. 18 ein, so ergeben sich für die harmonische Entwicklung von $\cos\gamma$ die einfachen Koeffizienten

$$A_{\xi 0} = (1-\lambda^2)\,, \quad A_{\xi 1} = -\lambda^3\,, \quad A_{\xi m} = (1-\lambda^2)\,\lambda^m\,, \qquad m = 2, 3,$$

und sämtliche $B_{\xi m} = 0$.

Für $\sin\gamma = -\sin 2\varphi = -2\sin\varphi\cos\varphi$ kann man

$$-\eta = -\sin\gamma = \frac{2\lambda\sin\alpha\,(1-\lambda\cos\alpha)}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\alpha}$$

schreiben, für $(1-\lambda\cos\alpha) : (1+\lambda^2-2\lambda\cos\alpha)$ aber $1+i_s$, so daß

$$-\eta = -\sin\gamma = 2\lambda\sin\alpha\,(1+i_s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

wird; und setzt man hierin die Entwicklung für i_s aus Gl. 19 ein unter Beachtung von

$$2\sin\alpha\cos m\alpha = \sin(m+1)\,\alpha - \sin(m-1)\,\alpha\,,$$

so folgt

$$A_{\eta m} = 0\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{ferner} \quad B_{\eta 1} = -\lambda\,(2-\lambda^2)$$

und

$$B_{\eta m} = -A_{\xi m}\,, \qquad m = 2, 3, \ldots .$$

Damit schreiben sich die Koeffizienten für die Entwicklungen von x und y:

$$\left.\begin{array}{llll} A_{x0} = u\,(1-\lambda^2)\,, & A_{y0} = v\,(1-\lambda^2), & A_{x1} = a - u\,\lambda^3\,, & A_{y1} = -v\,\lambda^3, \\ A_{xm} = u\,\lambda^m\,(1-\lambda^2)\,, & A_{ym} = v\,\lambda^m\,(1-\lambda^2)\,, & m = 2, 3, \ldots, & \\ B_{x1} = \lambda\,(2-\lambda^2)\,v\,, & B_{y1} = a - \lambda\,(2-\lambda^2)\,u\,, & B_{xm} = A_{ym}\,, & B_{ym} = -A_{xm}\,, \\ & & & m = 2, 3, \ldots . \end{array}\right\} \quad (22)^{8)}$$

Damit hat der Punkt 0 mit den Koordinaten $x_0 = A_{x0}$ und $y_0 = A_{y0}$ die Lage $\mathfrak{z}_0 = r(1-\lambda^2)\,e^{i\psi}$, d. h. er liegt auf dem gleichen durch den Winkel ψ gegenüber dem Steg festgelegten Strahl, auf dem auch das dritte Fokalzentrum der Koppelkurve oder der dritte Festpunkt C_0 bei der dreifachen Erzeugung der Koppelkurve [11] liegt, und es ist $\overline{A_0 O} = r\,(1-\lambda^2) = \overline{A\,K}\cdot(1-\lambda^2)$.

Die Grundschwingung liefert, da die Vektoren

$$\mathfrak{z}_{c1} = \mathfrak{i}\,(a - u\,\lambda^3) - \mathfrak{j}\,v\,\lambda^3 = \mathfrak{i}\,a - (\mathfrak{i}\,u + \mathfrak{j}\,v)\,\lambda^3$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{s1} &= \mathfrak{i}\,\lambda\,(2-\lambda^2)\,v + \mathfrak{j}\{a - \lambda\,(2-\lambda^2)\,u\} \\ &= (\mathfrak{i}\,v - \mathfrak{j}\,u)\,\lambda\,(2-\lambda^2) + \mathfrak{j}\,a \end{aligned}$$

aufeinander senkrecht stehen und nicht die gleichen Beträge haben, eine Ellipse. Für $v = 0$, Koppelpunkt liegt auf der Koppelmittellinie, hat man eine Ellipse, deren Achsen parallel den Koordinatenachsen verlaufen (vgl. a. u.).

Für die Oberschwingungen ergeben sich aber Kreisschwingungen. Denn es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{cm} &= \lambda^m\,(1-\lambda^2)\,(\mathfrak{i}\,u + \mathfrak{j}\,v) \\ \mathfrak{z}_{sm} &= \lambda^m\,(1-\lambda^2)\,(\mathfrak{i}\,v - \mathfrak{j}\,u) \end{aligned} \qquad m = 2, 3, \ldots,$$

d. h. die Amplituden beider Schwingungen sind für jedes m einander gleich und die Vektoren stehen aufeinander senkrecht. Danach gilt auch

$$x_m = r_m\cos(m\,\alpha - \psi)\,, \qquad y_m = r_m\sin(m\,\alpha - \psi)\,,$$

mit

$$r_m = \lambda^m\,(1-\lambda^2)\,r \qquad \text{für} \quad m = 2, 3, \ldots .$$

Vgl. hierzu Bild 7 für eine beliebige Koppelkurve[9]) [8].

[8]) Eine Kontrolle liefert $x(0) = u + a$, $v(0) = 0$ und $x(\pi) = u - a$, $v(\pi) = v$, wie unmittelbar folgt.
[9]) Die Koppelkurve selbst wurde einer früheren Arbeit [8] entnommen.

Für die Koppelkurve des Mittelpunktes der Koppel AB gilt mit $v = 0$ und $u = c/2 = d/2$ noch zusätzlich

$$r_0 = \frac{d}{2}(1-\lambda^2) = \frac{d^2-a^2}{2\,d}, \qquad \psi = 0,$$

$$A_{x1} = \frac{a}{2}(2-\lambda^2) = a - \frac{a}{2}\lambda^2 \quad \text{und} \quad B_{\eta 1} = \frac{a}{2}\lambda^2 < A_{x1}$$

als Halbachsen der Ellipse für die Grundschwingung[10]).

Bei der Lemniskate [8] wird $\lambda = 1/\sqrt{2}$ und gilt somit $A_{x1} = 3\,a/4$, $B_{x1} = a/4$.

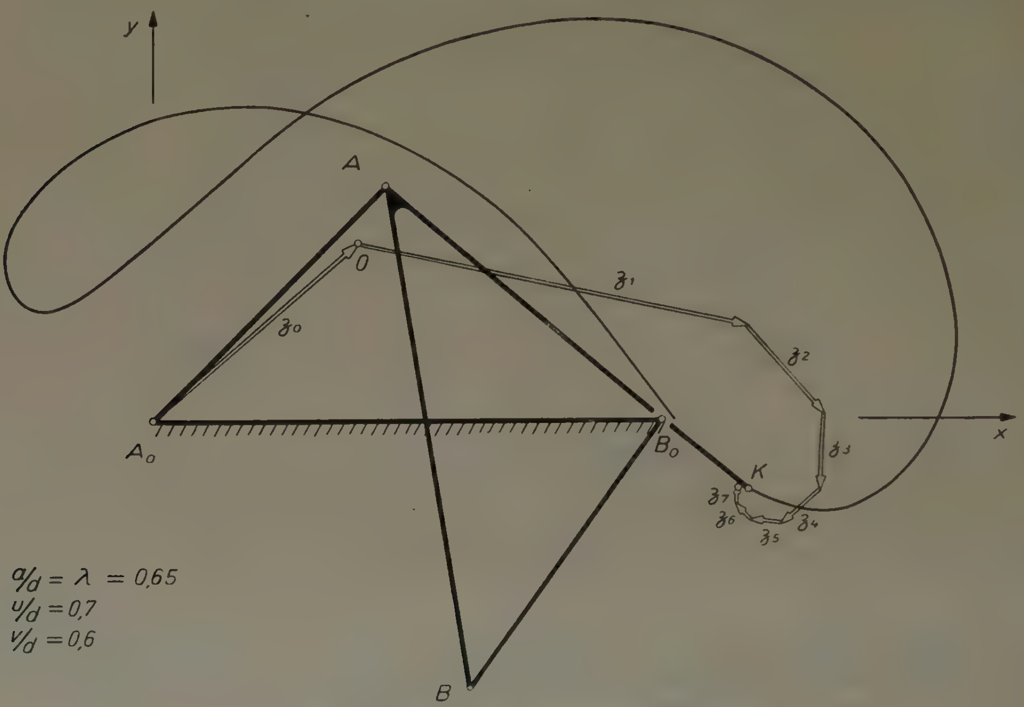


Bild 7. Gegenläufiger Antiparallelkurbeltrieb, Koppelkurve

2.5.3. Der gleichläufige Antiparallelkurbeltrieb[11]). Auch hier gilt, vgl. Bild 8, wieder

$$\cos\gamma = \cos 2\,\varphi \qquad \text{und} \qquad \sin\gamma = -\sin 2\,\varphi$$

wie soeben. Nur hat man es jetzt bei der zugeordneten Kurbelschleife mit einer umlaufenden zu tun, es ist jetzt $\lambda = a/d$ größer als eins. Es gelten dann zunächst die gleichen Entwicklungen wie oben, aber für i_s muß jetzt angesetzt werden [12], [18]

$$i_s = -1 - \sum_{m=1,2,} \lambda^{-m}\cos m\,\alpha = -1 - \sum_{m=1,2,} \bar{\lambda}^m \cos m\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (23),$$

mit $\bar{\lambda} = 1/\lambda < 1$.

Für die Entwicklung von $\xi = \cos\gamma$ hat man somit

$$A_{\xi 0} = 0, \quad A_{\xi 1} = -\bar{\lambda}, \quad A_{\xi m} = (\lambda^2 - 1)/\lambda^m = (1-\bar{\lambda}^2)\,\bar{\lambda}^{m-2}, \qquad m = 2, 3, \ldots$$

und sämtliche $B_{\xi m} = 0$. Aber für $\eta = \sin\gamma$ gilt jetzt eine gleichartige Anordnung, d. h. $A_{\eta 0} = 0$ $B_{\eta 1} = A_{\xi 1}$, $B_{\eta m} = A_{\xi m}$. Setzt man diese Koeffizienten in die Entwicklung für x und y ein, so folgt schließlich $\mathfrak{z}_0 = 0$ und

$$\mathfrak{z}_{c1} = \mathfrak{i}\,(a - u/\lambda) - \mathfrak{j}\,v/\lambda,$$
$$\mathfrak{z}_{s1} = \mathfrak{i}\,v/\lambda + \mathfrak{j}\,(a - u/\lambda);$$

diese Vektoren stehen aufeinander senkrecht (das skalare Produkt verschwindet), und ihre Amplituden haben den gleichen Betrag, d. h. die Grundschwingung stellt für jeden Koppelpunkt eine Kreisschwingung dar, vgl. Bild 9a, deren Radius r_1 aus $r_1^2 = (a - u/\lambda)^2 + (v/\lambda)^2$ folgt.

[10]) Hierbei ist beiläufig r_0 der Halbparameter der elliptischen Relativpolbahn.
[11]) Vgl. [8].

Ebenso stellen aber die Oberschwingungen genau wie bei dem gegenläufigen Getriebe Kreisschwingungen dar, Bild 9b, so daß ähnlich wie dort

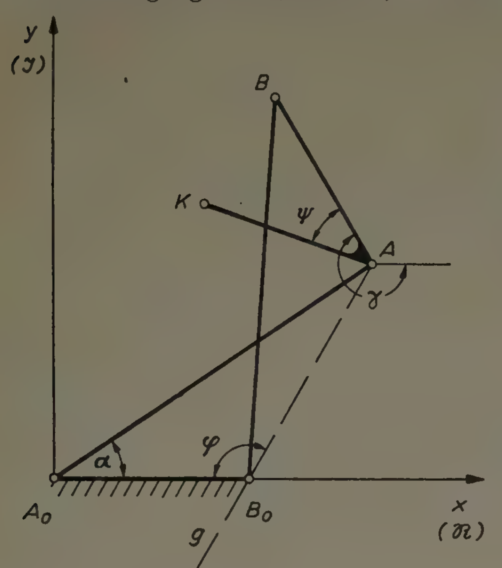


Bild 8. Gleichläufiger Antiparallelkurbeltrieb, Abmessungen

$$x_m = r_m \cos(m \alpha + \psi),$$
$$y_m = r_m \cos(m \alpha + \psi)$$

mit

$$r_m = r(\lambda^2 - 1)/\lambda^m$$

gilt, vgl. a. Bild 10[12]) für eine beliebige Koppelkurve. Wird $v = 0$ gewählt, so wird $r_1 = a - u/\lambda$ und diese Amplitude verschwindet, wenn $u = \lambda a - a^2/d$ ist, d. h. es verschwindet dann die Grundschwingung völlig.

Bei diesen Koppelkurven des gleichläufigen Antiparallelkurbeltriebes liegen also, da sich nur Kreisschwingungen überlagern, höhere Radkurven vor. Wenn man zwei Schwingungen, z. B. nur die ersten beiden Glieder der Entwicklung benutzt, so liefern diese addiert eine zyklische Kurve als mögliche Näherung.

2.6. Geschwindigkeit und Beschleunigung

Setzt man $\alpha = \omega t$ und differentiiert die Reihen für x und y ein- bzw. zweimal, so erhält man die bezogenen Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten [4], [14]

$$v_x/\omega = dx/d\alpha, \qquad v_y/\omega = dy/d\alpha,$$
$$b_x/\omega^2 = d^2x/d\alpha^2, \quad b_y/\omega^2 = d^2y/d\alpha^2$$

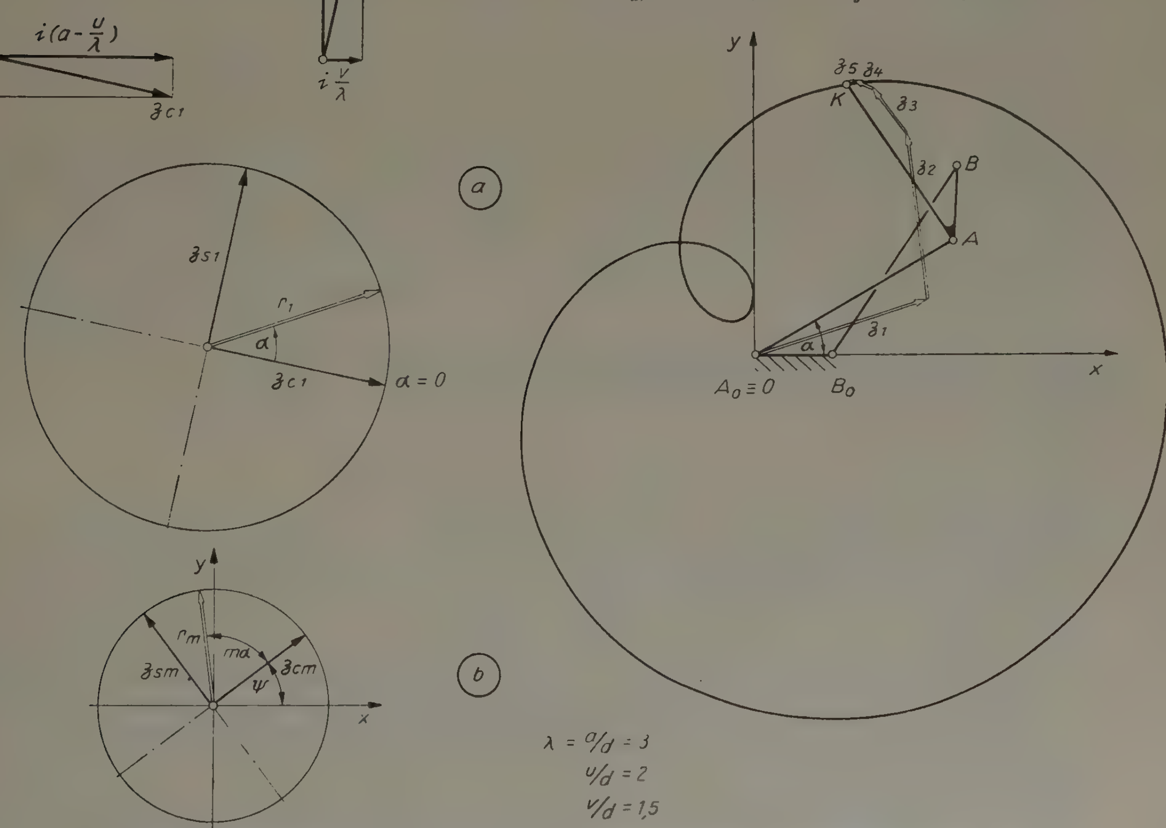


Bild 9. Vektordiagramm

Bild 10. Gleichläufiger Antiparallelkurbeltrieb, Koppelkurve

und hat damit auch die Harmonischen Reihen für diese Komponenten, sofern die Reihen noch konvergieren (was bei Getrieben, die nicht in der Verzweigungslage durchschlagen, immer der Fall ist). Dabei gilt dann in der Geschwindigkeit $A_{vm} = m B_m$, $B_{vm} = - m A_m$ und in der

[12]) Vgl. [8].

Beschleunigung entsprechend $A_{bm} = -m^2 A_m$, $B_{bm} = -m^2 B_m$, worin die Indices v und b auf Geschwindigkeit und Beschleunigung hinweisen sollen. Es können Harmonische, welche in der Entwicklung von x und y klein sind, in den Beschleunigungskomponenten groß werden, „Differentiieren rauht auf.“

Literatur

[1] W. De Beauclair, Untersuchungen über die *Fourier*synthese der Ladungsverteilung in Kristallen. Bd. I: Verfahren und Geräte zur mehrdimensionalen *Fourier*synthese; u. U. Sinogowitz, Bd. II: Phasenfaktorentafel. Berlin 1949.
[2] R. Beyer, Kinematische Getriebesynthese. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[3] E. Lenk, Elektrisches Analogiegerät zur *Fourier*-Analyse an Gelenkgetrieben. Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen. Opladen, erscheint demnächst.
[4] E. Mewes, Formeln für die Massenkräfte und kinematische Zusammenhänge bei geschränkten Schubkurbelgetrieben. Ing.-Arch. 24, H. 5 (1956), S. 291—298.
[5] W. Meyer zur Capellen, Die kinematische Erzeugung des n-Ecks mit abgerundeten Ecken. Getriebetechnik 4 (1936), S. 44—47.
[6] W. Meyer zur Capellen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen an Umlaufrädergetrieben. Getriebetechnik 4 (1936), S. 577—580.
[7] W. Meyer zur Capellen, Der Kurbeltrieb als schwingungsfähiges System. Getriebetechnik 8 (1940), S. 130.
[8] W. Meyer zur Capellen, Über die Koppelkurven des Zwillingskurbeltriebes. Zeitschr. f. angew. Math. u. Phys. (ZAMP), 2 (1951), S. 289—307.
[9] W. Meyer zur Capellen, Leitfaden der Nomographie. Springer-Verlag 1953.
[10] W. Meyer zur Capellen, Harmonische Analyse bei der Kurbelschleife. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. (ZAMM) 36 (1956), S. 151.
[11] W. Meyer zur Capellen, Bemerkungen zum Satz von Roberts über die dreifache Erzeugung der Koppelkurve. Konstr. 8 (1956), S. 268—270.
[12] W. Meyer zur Capellen, Kinematik und Dynamik der Kurbelschleife. Werkst. u. Betrieb 89 (1956), S. 581—584, S. 677—783.
[13] W. Meyer zur Capellen, Die Kurbelschleife zweiter Art. Werkst. u. Betrieb 90 (1957), H. 5, S. 306 bis 308.
[14] W. Meyer zur Capellen und Mitarbeiter, Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel. Forschungsbericht Nr. 449 des Landes Nordrhein-Westfalen. Opladen 1958.
[15] W. Meyer zur Capellen, Der Flächeninhalt von Koppelkurven. Ein Beitrag zu ihrem Formenwandel. Forschungsbericht Nr. 506 des Landes Nordrhein-Westfalen. Opladen 1958.
[16] W. Meyer zur Capellen, Die elliptischen Zahnräder und die Kurbelschleife. Werkst. u. Betr. 91 (1958), S. 41—45.
[17] W. Meyer zur Capellen, Das Kreuzgelenk als periodisches Getriebe. Werkst. u. Betr. 91 (1958), 435—444.
[18] W. Meyer zur Capellen, Die Harmonische Analyse bei der elliptischen Kurbelschleife. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 38 (1958), 43—55.
[19] W. Meyer zur Capellen, Über elliptische Kurbelschleifen. Werkst. u. Betr. 91 (1958), im Druck.
[20] W. Meyer zur Capellen, Über räumliche Kurbelschleifen und ihre gleichwertigen ebenen Getriebe. Vortrag auf der Getriebetagung Konstanz 1957, enthalten in: VDI-Berichte 29 (1958), S. 91.
[21] W. Meyer zur Capellen, Die geschränkte Kurbelschleife. Mitteilung I: Die Bewegungsverhältnisse. Mitteilung II: Die harmonische Analyse. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen. Opladen, im Druck.
[22] W. Meyer zur Capellen, Die zyklischen Kurven und die Kurbelschleife. Forschg. a.d.Geb.d.Ing. wes. 25 (1959).
[23] H. Rankers, Mechanisches Analogiegerät zur Fourier-Analyse an Gelenkgetrieben. Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen. Opladen, erscheint demnächst.
[24] W. Wunderlich, Höhere Radlinien. Österr. Ing.-Arch. I, (1947), S. 277—296.
[25] W. Wunderlich, Höhere Radlinien als Näherungskurven. Österr. Ing.-Arch. IV (1950), S. 3—11.

Manuskripteingang: 29. 2. 1958

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. W. Meyer zur Capellen, Aachen, Ronheider Weg 46

Shock Wave Propagation in an Infinitely Electrically Conductive Gas with Transverse Magnetic Field and Gravitation *)

by *S. I. Pai*[1])

Das Verhalten eines eindimensionalen starken Verdichtungsstoßes in einem Gas mit unendlich großer elektrischer Leitfähigkeit bei Anwesenheit eines transversalen Magnetfeldes und eines Gravitationsfeldes wird mittels der Lagrangeschen Methode untersucht Das magnetische Feld bewirkt eine Erhöhung der Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie eine Verbreiterung des vom Verdichtungsstoß beeinflußten Gebietes.

Die wesentlichen Punkte des gleichen Problems werden auch vom Eulerschen Standpunkt aus kurz behandelt.

The behavior of a one dimensional strong shock wave propagating itself in an infinitely electrically conductive gas in the presence of a transverse magnetic field and a field of gravity has been analyzed by means of the Lagrangian method. The effect of the magnetic field is to increase the speed of the shock wave and the domain influenced by the shock wave.

*) This research was supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research, Air Research and Development Command Under Contract AF 18 (600) 993.

[1]) On sabbatical leave from Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland. Visiting Professor in Institut für Theoretische Gasdynamik, DVL e.V. for 1957—1958.

A brief description of the chracteristics of the same problem from the Eulerian point of view is also given.

Au moyen de la méthode de Lagrange on analyse l'allure d'une forte onde de choc à une dimension dans un gaz à conductibilité électrique infiniment forte dans la présence d'un champ magnétique transversal et d'un champ de gravitation. Le champ magnétique provoque une augmentation de la vitesse de la propagation ainsi qu'un élargissement du domaine influencé par l'onde de choc.

En outre les points principaux du même problème sont brièvement traités aussi du point de vue d'Euler

Методом Лагранжа изучается поведение одномерной сильной ударной волны в газе с бесконечно большой электропроводимостью при наличии поперечного магнитного поля и поля тяготения. магнитное поле вызывает увеличение скорости распространения и расширение области влияния ударной волны. Основные пункты той же задачи кроме того рассматриваются кратко с точки зрения Эйлера.

1. Introduction

We investigate the one dimensional flow produced by a strong shock wave in a gas of infinite conductivity for electricity subjected to a transverse magnetic field and to gravity. The shock wave is produced by the motion of a body (e. g. by a piston acting on a column of gas in a tube). We shall study only the flow outside the shock region, so that viscous stress and heat conduction may be neglected and the electrical conductivity may be considered as infinite; but the change of entropy must be taken into account. We also assume that the usual magneto-gas dynamic approximations are applicable in our problem [1].

There are two ways to investigate this problem: (1) the *Eulerian* method and (2) the *Lagrangian* method. In the *Eulerian* method, we may use the method of characteristics. In the present case, we have three sets of characteristics [see reference [1], eq. (39)]; i. e.,

(a) the lines of flow

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (1),$$

where x is the spatial coordinate; t, the time and u, the flow velocity.

(b) the characteristic lines

$$\frac{dx}{dt} = u + a_e \quad (2),$$

(c) the characteristic lines

$$\frac{dx}{dt} = u - a_e \quad (3),$$

where a_e is the effective sound speed in magneto-gas dynamic, as defined by

$$a_e^2 = \gamma R T + \mu_e H^2/\varrho \quad (4).$$

Here γ is the ratio of specific heats, R is the gas constant, T is the absolute temperature of the medium, μ_e is the magnetic permeability, H is the transverse magnetic field strength and ϱ is the density of the gas.

The characteristics (1) are double roots of the characteristic equation. Hence along the flow lines, there are two relations, viz, (i) entropy S = constant and (ii) H/ϱ = constant. Along the characteristic lines (2) and (3), respectively, the following relations hold [2]:

$$\mu_e H \left\{\frac{\partial H}{\partial t} + (u \pm a_e)\frac{\partial H}{\partial x}\right\} \pm \varrho\, a_e \left\{\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm a_e)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial p}{\partial t} + (u \pm a_e)\frac{\partial p}{\partial x}\right\} = -g \quad (5).$$

In the case of isentropic flow or in the flow with weak shock waves across which the change in S and in (H/ϱ) are negligible, only the two sets of characteristic curves (2) and (3) are needed to determine the flow field in the (x, t) plane with the help of relations (5). But as soon as S and (H/ϱ) are not constant in the whole plane, we have to use all three sets of lines (1) and (3) to determine the flow field. Usually it is difficult to work with three sets of lines in a plane. Hence in the case of strong shock waves with a large change in entropy S and in (H/ϱ), it seems more appropriate to give main attention to lines of flow $\frac{dx}{dt} = u$ along which the entropy S and (H/ϱ) are constant (except across the shock wave front), instead of using the characteristic curves $\frac{dx}{dt} = u \pm a_e$. Thus it is more convenient to apply the *Lagrangian* method of description of the flow in the case of strong shock waves.

2. Lagrangian Equations of Motion [3]

Let x be the coordinate of an element of volume of gas at time t. We write

$$x = \varphi(s, t) \quad (6).$$

where s is a parameter, characterizing that particular element of volume of gas and thus its path in the x-t plane. In general the choice of s is immaterial, but in certain problems, a special choice of s will be more convenient than others. We will choose s such that $x=s$ so long as the element of volume was at rest.

By definition

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (7).$$

The equation of motion is

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_e H^2}{2}\right) - g \quad (8).$$

The partial derivatives of φ with respect to t in which s remain constant, refer to the changes with time observed when following the motion of the element of volume of the gas. The left hand side term of equation (8) represents the acceleration of the element considered. The three right hand side terms represent the accelerations due to the gas pressure gradient, the magnetic pressure gradient and the gravitational acceleration g, respectively.

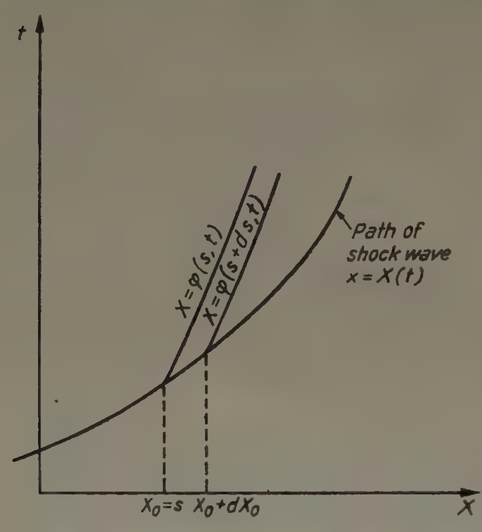


Fig. 1. Path of element of gas across a shock wave

If we write

$$\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial s} \quad (9)$$

equation (8) becomes

$$\Phi\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\right) = -\frac{\partial}{\partial s}(p + p_H) \quad (10),$$

where $p_H = \frac{\mu_e H^2}{2}$.

In the x-t plane (Fig. 1) we shall draw the path of the shock wave as $x = X(t)$. Let ϱ_0 be the density of the gas at rest and ϱ, the density of the gas after crossing the shock wave. By the equation of continuity, we have

$$\varrho\, dx = \varrho_0\, dx_0 \quad (11).$$

Now here $dx = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds = \Phi\, ds$ and since $ds = dx_0$, we obtain

$$\varrho\,\Phi = \varrho_0 \quad (12),$$

where ϱ_0 may or may not be a constant. In general, one must assume ϱ_0 to be function of s.

If we consider only the case where the flow behind the shock wave is continuous so that the entropy is a constant along each line of flow, the pressure may be expressed in the following form:

$$p = p_1\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^\gamma = p_1\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^\gamma \quad (13),$$

where the subscript 1 refers to the state immediately behind the shock front.

Similarly, we have

$$H = H_1\frac{\varrho}{\varrho_1} = H_1\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right) \quad (14).$$

Hence the equation of motion (10) becomes

$$\varrho_0\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\right) = -\frac{\partial}{\partial s}\left[p_1\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^\gamma + p_{H_1}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^2\right] \quad (15),$$

where $p_{H_1} = \frac{\mu_e H_1^2}{2}$ = magnetic pressure immediately behind the shock front.

The velocity of the shock wave is

$$\xi = \frac{dX}{dt} \quad (16).$$

At the path of the shock wave we have

$$\varphi(s, t) = s \quad (17)$$

hence, taking the time derivative along this path, we have

$$\Phi_1 = \frac{\xi - u_1}{\xi} \quad (18).$$

3. Boundary Conditions

When we consider the problem of a shock wave produced by the motion of a body (e. g. by a piston acting on a column of gas in a tube), we can take $s = 0$ for the element of volume of the gas immediately adjacent to the body. If the motion of the body or piston is fully given, $\varphi(0, t)$ will be completely known (Fig. 2). In other cases, a condition or an equation may be prescribed, determining the motion of this body. In either case, this fixes a boundary condition for the function $\varphi(s, t)$ referring to $s = 0$.

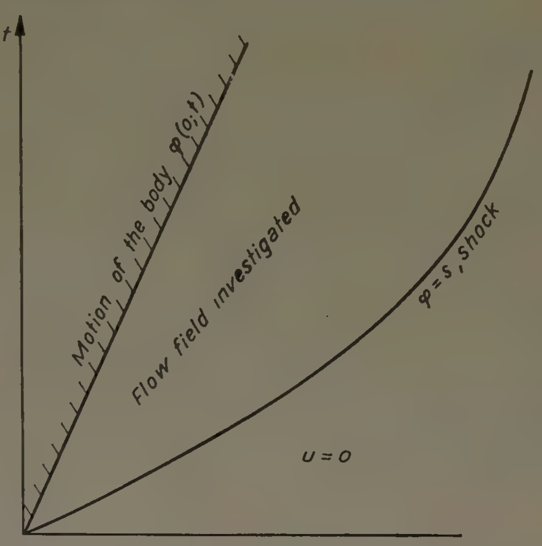


Fig 2. Boundary Condition in the Flow of Shock Ware Propagation

A second boundary condition refers to the path of the shock wave. It must be obtained from the condition (17) together with (18) and the generalized Rankine-Hugoniot conditions [4] in magneto-gas dynamics. The generalized Rankine-Hugoniot relations in the coordinate system in which the velocity in front of the shock wave is zero, are as follows:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho_0 \xi = \varrho_1 (\xi - u_1) \\ &\frac{p_1}{\varrho_1 \xi^2} + \left(\frac{\xi - u_1}{\xi}\right)^2 - \left(1 + \frac{p_0}{\varrho_0 \xi^2} + \frac{p_{H_0}}{\varrho_0 \xi^2} - \frac{p_{H_1}}{\varrho_0 \xi^2}\right)\frac{\xi - u_1}{\xi} = 0, \\ &H_0 \xi = H_1 (\xi - u_1) \\ &\frac{p_1}{(\gamma - 1)\varrho_1 \xi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - u_1}{\xi}\right)^2 + \left(1 + \frac{p_0}{\varrho_0 \xi^2} + \frac{p_{H_0}}{\varrho_0 \xi^2} - \frac{p_{H_1}}{\varrho_0 \xi^2}\right)\frac{\xi - u_1}{\xi} - \frac{a_0^2}{(\gamma - 1)\xi^2} - \frac{1}{2} \\ &\qquad - 2\frac{p_{H_0}}{\varrho_0 \xi^2}\left(1 - \frac{H_1}{H}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (19),$$

where the subscript 0 refers to value immediately in front of the shock front and the subscript 1 refers to value immediately behind the shock front.

From equations (19), we have

$$u_1 = \left|\frac{1}{\gamma + 1}\right|\left[\frac{\gamma + 3}{2}\xi - \frac{a_0^2}{\xi} - \frac{\gamma p_{H_0}}{\varrho_0 \xi} - \frac{1}{2}\sqrt{\left[(\gamma - 1)\xi + \frac{2 a_0^2}{\xi} + \frac{2\gamma p_{H_0}}{\varrho_0 \xi}\right]^2 + 8(2 - \gamma)(\gamma + 1)\frac{p_{H_0}}{\varrho_0}}\right] \quad (20).$$

Furthermore we have

$$p_1 = p_0 + \varrho_0 \xi u_1 + p_{H_0}[1 - \Phi_1^{-2}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

and

$$H_1 = H_0 \Phi_1^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

4. Solution by Series Expansion

For small values of s and t, we may use the method of series expansion to find $\varphi(s, t)$. We write

$$\varphi(s, t) = a_1 t + a_2 s + b_1 t^2 + b_2 t s + b_3 s^2 + c_1 t^3 + c_2 t^2 s + c_3 t s^2 + c_4 s^3 + \cdots \quad (23).$$

The path of the shock wave may be written as

$$t = r_1 s + r_2 s^2 + r_3 s^3 + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Here $a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; \ldots, r_1, r_2, r_3 \ldots$ are unknown constant coefficient to be determined.

If the motion of the body is known, we have a condition at $s = 0$, which takes the form

$$\varphi(0, t) = a_1 t + b_1 t^2 + c_1 t^3 + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

from which $a_1, b_1, c_1, \ldots$ can be found.

For instance, if we take the case of uniform motion with velocity V, so that $\varphi(0, t) = V t$, then

$$a_1 = V, \quad b_1 = c_1 = \cdots = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

These values will be accepted in the following lines.

Along the path of the shock wave, we have $\varphi(s, t) = s$. Thus with equation (26), we have

$$s = V(r_1 s + r_2 s^2 + \cdots) + a_2 s + b_2 r_1 s^2 + \cdots + b_3 s^2 + \cdots \quad (27).$$

Hence

$$a_2 = 1 - V r_1, \quad b_3 = -(V r_2 + b_2 r_1), \quad c_4 = -(V r_3 + b_2 r_2 + c_2 r_1^2 + c_3 r_1) \cdots \quad (28).$$

From equation (24), we have

$$\frac{1}{\xi} = \frac{dt}{ds} = r_1 + 2 r_2 s + 3 r_3 s^2 + \cdots \quad (29),$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{r_1\left(1 + \frac{2 r_2}{r_1} s + \frac{3 r_3 s^2}{r_1} + \cdots\right)} \\ &= \frac{1}{r_1}\left\{1 - \frac{2 r_2}{r_1} s + \left(4\frac{r_2^2}{r_1} - 3\frac{r_3}{r_1}\right) s^2 - \left(4\frac{r_4}{r_1} - 12\frac{r_2 r_3}{r_1^2} + 8\frac{r_2^3}{r_1^3}\right) s^3 + \cdots\right\} \end{aligned}\right\} \quad (30).$$

Substituting equations (29) and (30) into equation (20) and expanding the expression into a power series of s, we may write formally the expression of u_1 as follows:

$$u_1 = \frac{1}{\gamma + 1}\left[A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots\right] \quad (31),$$

where A_0, A_1, etc. are constant coefficients depending on the exact expressions for both p_H, and ϱ_0. A special case will be worked out in section 6.

By definition

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V + b_2 s + 2 c_2 t s + c_3 s^2 + \cdots \quad (32)$$

and thus

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= V + b_2 s + 2 c_2 (r_1 s + r_2 s^2 + \cdots) s + c_3 s^2 + \cdots \\ &= V + b_2 s + (2 c_2 r_1 + c_3) s^2 + \cdots \\ &= V + b_2 s + c^* s^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (33),$$

where $c^* = 2 c_2 r_1 + c_3$.

Equating coefficients in equations (31) and (33), we have

$$\frac{A_0}{\gamma + 1} = V, \qquad \frac{A_1}{\gamma + 1} = b_2, \ldots \quad (34).$$

Since the expressions A_0, A_1, etc. contain the coefficients r_1, r_2 etc., we may find relations for r_1, r_2 etc. in terms of b_2, c_2, c_3, ... and the parameters γ, a_0, H_0, V etc.

Finally we determine the coefficients b_2, c_2, c_3, etc. from the equation of motion.

We are going to calculate the coefficients for the case of a shock wave in a gas of constant temperature, subjected to a constant magnetic field strength H_0, and having a density decreasing in consequence of gravity. The corresponding case without magnetic field has been worked out by Burgers in reference [4.] We shall compare our results with Burgers results in order to show the effect of the magnetic field on this problem.

5. Shock Wave in an Ionized Gas of Constant Temperature and Subjected to Gravity and under Constant Transverse Magnetic Field

We consider a vertical column of gas of constant temperature and take x as the vertical distance, positive upward. We have the following conditions for the gas at rest.

$$\left.\begin{aligned} &\text{pressure} &&= p_0(x) = \varrho_0 R T_0, \\ &\text{density} &&= \varrho_0(x), \\ &\text{temperature} &&= T_0 = \text{constant}, \\ &\text{magnetic field} &&= H_0 = \text{constant}, \\ &\text{sound speed} &&= a_0 = \sqrt{\gamma R T_0} = \text{constant}, \\ &\frac{dp_0}{dx} &&= -\varrho_0 g \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

The equation of motion (8) in the present case reduces to

$$\frac{dp_0}{dx} = -\varrho_0 g \quad (36).$$

Substituting from equations (35) into equation (36) and noting that $s = x$ for the gas at rest, we have

$$\frac{d\varrho_0}{ds} = -\frac{\gamma}{a_0^2}\varrho_0 g \quad \ldots \quad (37).$$

Integration of equation (37) gives

$$\varrho_0 = \varrho_{00} e^{-\frac{\gamma}{a_0^2} g s} \quad \ldots \quad (38),$$

where ϱ_{00} is a constant.

Substituting equations (18), (21), (22), (35) and (38) into equation (15), we have

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{a_0^2}{\gamma} + \xi u_1\right)\frac{\Phi_1^\gamma}{\Phi^\gamma}\right] + \left(\frac{a_0^2}{\gamma} + \xi u_1\right)\frac{\gamma}{a_0^2} g \frac{\Phi_1^\gamma}{\Phi^\gamma} - \frac{p_{H_0}}{\varrho_{00}} e^{\frac{\gamma}{a_0^2} g s} \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Phi_1^{\gamma-2}\frac{\Phi_1^2 - 1}{\Phi^\gamma} + \frac{1}{\Phi^2}\right\} \quad (39),$$

where $\Phi_1 = 1 - \frac{u_1}{\xi}$ and $\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$.

Equation (39) is the equation of motion for the flow produced by a strong shock in a gas of constant temperature and constant magnetic field, subjected to gravity.

The boundary conditions are:

(1) a given condition for the path $s = 0$ e. g. $\varphi(0, t) = V t$,

(2) $\varphi = s$ along the trace of the shock wave together with the generalized Rankine-Hugoniot relations across the shock.

6. Numerical Example

We are going to determine the flow field behind the shock wave in an infinitely conductive gas of constant temperature and constant magnetic field subjected to gravity with the following data[2])

$$V = 0.3, \qquad a_0 = 1, \qquad \gamma = \frac{5}{3}, \qquad \frac{p_{H_0}}{\varrho_{00}} = 0.1.$$

From equation (20) with the above numerical values, we have

$$u_1 = \frac{3}{8}\left[\frac{7}{3}\xi - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{6\xi} e^{\frac{5}{3} g s} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\xi + \frac{2}{\xi} + \frac{1}{3}\xi e^{\frac{5}{3} g s}\right)^2 + \frac{32}{45} e^{\frac{5}{3} g s}}\right] \quad \ldots (40).$$

Also

$$e^{\frac{5}{3} g s} = 1 + \frac{5}{3} g s + \frac{25}{18} g^2 s^2 + \frac{125}{162} g^3 s^3 + \cdots \quad \ldots \quad (41).$$

Substituting equations (29), (30), (33) and (41) into equation (40), we have

$$0.300 + b_2 s + c^* s^2 + \cdots$$
$$= \frac{3}{8}\left(\frac{7}{3} K_1 - K_2 - \frac{1}{6} K_2 K_3\right) - \frac{3}{16}\left\{\left(\frac{2}{3} K_1 + 2 K_2 + \frac{1}{3} K_2 K_3\right)^2 + \frac{32}{45} K_3\right\}^{1/2} \quad (42)$$

with

$$K_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{2 r_2}{r_1^2} s + \left(\frac{4 r_2^2}{r_1^3} - \frac{3 r_3}{r_1^2}\right) s^2 + \cdots,$$
$$K_2 = r_1 + 2 r_2 s + 3 r_3 s^2 + \cdots,$$
$$K_3 = 1 + \frac{5}{3} g s + \frac{25}{18} g^2 s^2 + \cdots.$$

Equating the coefficients of equal powers of s on both sides of equation (42), we have for the zeroth power of s

$$\frac{4}{9 r_1^2} + \frac{28}{9} + \frac{49}{9} r_1^2 + \frac{32}{45} = 4\left(\frac{7}{3 r_1} - \frac{7}{6} r_1 - 0.8\right)^2$$

or

$$r_1^3 - 3.0857 r_1^2 - 2.0000 r_1 + 2.8572 = 0 \quad \ldots \quad (43).$$

[2]) The numerical data, except p_{H_0}/ϱ_{00}, are the same as those given in reference [4] by Professor Burgers. In this way, we may compare the results with and without magnetic field effects.

Equation (43) has three roots which are

$$\left.\begin{aligned} r_1 = r_{11} &= 0.7588 \\ r_{12} &= -1.0991 \\ r_{13} &= 3.4260 \end{aligned}\right\} \qquad (44).$$

We must discard the root r_{12} because, according to equation (24) would give a negative value of t for small s which is outside the region $t \geq 0$ in which we are interested. Similarly we must discard the root r_{13} because according to equation (28) it would give a negative of a_2, and thus in equation (23) would make $x = \varphi(s, t)$ negative for small s and t. Hence the only root which we can use is $r_1 = r_{11} = 0.7588$. We shall use this value for all the following calculations. Thus

$$r_1 = 0.7588, \qquad \frac{1}{r_1} = 1.3179 \qquad (45).$$

From the first equation of (28) we then obtain

$$a_2 = 1 - 0.3\, r_1 = 0.7724 \qquad (46).$$

From the coefficients of the terms with the first power of s in equation (42) and the value of r_1 given in equation (45), we have

$$r_2 = -0.2307\, b_2 - 0.4484\, g \qquad (47).$$

From the coefficients of the terms with s^2 in equation (42) and the values of r_1 and r_2 given in equations (45) and (47), respectively, we have

$$r_3 = 0.05650\, b_2^2 + 0.03545\, g\, b_2 - 0.01910\, g^2 - 0.1538\, c^* \qquad (48).$$

Substituting the values of r_1, r_2, and r_3 into equation (30), we arrive at

$$\begin{aligned} \xi = 1.3179 &+ (0.8013\, b_2 + 0.1557\, g)\, s \\ &+ (0.1929\, b_2^2 + 0.0045\, g\, b_2 + 0.1179\, g^2 + 0.8013\, c^*)\, s^2 + \cdots \end{aligned} \qquad (49).$$

We further have

$$u_1 = 0.3000 + b_2\, s + c^*\, s^2 + \cdots \qquad (50)$$

and consequently

$$\begin{aligned} \xi\, u_1 = 0.3954 &+ (1.5583\, b_2 + 0.04671\, g)\, s \\ &+ (1.5583\, c^* + 0.8592\, b_2^2 + 0.1571\, g\, b_2 + 0.03537\, g^2)\, s^2 + \cdots \end{aligned} \qquad (51).$$

Next from (23) and (24) we find:

$$\left.\begin{aligned} \Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= a_2 + b_2\, t + 2\, b_3\, s + \cdots \\ &= 0.7724 + b_2\, s + 2\, b_3\, s + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (52).$$

$$\Phi_1 = 0.7724 + (0.7588\, b_2 + 2\, b_3)\, s + \cdots \qquad (53).$$

Substituting the expressions (23) and (51) to (53) into the equation of motion (39) and equating coefficients of the same powers of s and t, the following results are obtained:

For the zeroth powers of s and t, we derive

$$3.4067\, b_2 = 0.6123\, g$$

or

$$b_2 = 0.1797\, g \qquad (54).$$

Substituting equation (54) into equation (47) we find

$$r_2 = -0.08630\, g \qquad (55).$$

From equation (28) we have

$$b_3 = -(V\, r_2 + b_2\, r_1) = -0.1105\, g \qquad (56).$$

For the terms with the first power of t, we derive

$$-0.2551\, g^2 + 4.8719\, c_3 = 0$$

or

$$c_3 = 0.05236\, g^2 \qquad (57).$$

From the terms with the first power of s, with the help of (57), we obtain

$$c_2 = -0.01253\, g^2 \qquad (58).$$

Hence

$$c^* = 2\, r_1\, c_2 + c_3 = 0.03334\, g^2 \qquad (59).$$

Equation (48) then gives

$$r_3 = -0.01603\, g^2 \qquad (60)$$

Equation (28) gives

$$c_4 = -(V r_3 + b_2 r_2 + c_2 r_1^2 + c_3 r_1) = -0.01220\, g^2 \qquad (61).$$

The following table gives the numerical values of the coefficients for the flow field with and without magnetic field (Burgers values)

Coefficients	Without Magnetic Field	With Magnetic Field
a_1	0.3	0.3
a_2	0.7541	0.7724
b_1	0	0
b_2	0.1900 g	0.1797 g
b_3	—0.1405 g	—0.1105 g
c_1	0	0
c_2	—0.0118 g^2	—0.01253 g^2
c_3	0.06297 g^2	0.05236 g^2
c_4	—0.03243 g^2	—0.01220 g^2
c^*	0.0437 g^2	0.03334 g^2
r_1	0.8198	0.7588
r_2	—0.0509 g	—0.08630 g
r_3	—0.00529 g^2	—0.01603 g

Summarizing we obtain for the case with magnetic field $\left(\frac{p_{H_0}}{\varrho_{00}} = 0.1\right)$

$$\varphi = 0.3000\, t + 0.7724\, s + 0.1797\, g\, s\, t - 0.1105\, g\, s^2 - 0.01253\, g^2 s\, t^2 + 0.05236\, g^2 s^2 t - 0.01220\, g^2 s^3 + \cdots \qquad (62).$$

Along the path of the shock wave, we have

$$t = 0.7588\, s - 0.08630\, g\, s^2 - 0.01603\, g^2 s^3 + \cdots \qquad (63),$$

$$u_1 = 0.3000 + 0.1797\, g\, s + 0.03334\, g^2 s^2 + \cdots \qquad (64),$$

$$\xi = 1.3178 + 0.2998\, g\, s + 0.1517\, g^2 s^2 + \cdots \qquad (65).$$

We further have

$$\Phi = 0.7724 + 0.1797\, g\, t - 0.2210\, g\, s - 0.01253\, g^2 t^2 + 0.1047\, g^2 s\, t - 0.03660\, g^2 s^2 + \cdots \quad (66).$$

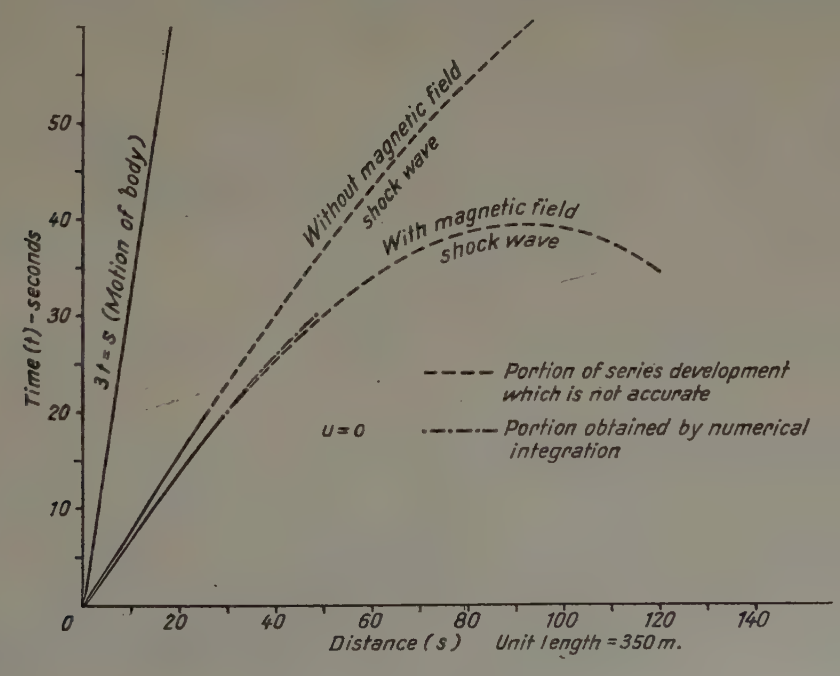


Fig. 3. Flowfield of our numerical example
$\gamma = 5/3$, $p_{H_0}/\varrho_{00} = 0{,}1$, $a_0 = 350$ meters/sec., $g = 9{,}81$ meters/sec².

We have plotted the path of the shock wave from equation (63), with three terms on, in Fig. 3. The path of motion of the body ($s = 0.3\, t$) and that of the shock wave without magnetic

field are shown also in Fig. 3. The flow field between the path of the body and that of the shock wave are what we are interested in. It is evident that the results of our series expansion are not valid for large s, because at large values of s, the time appears to go backward.

A way to determine the range of validity of our series expansion up to three terms is as follows:

We calculate the flow velocity u_1 immediately behind the shock wave front by two different methods: one is obtained from equation (64) which may be denoted by u_{1s}; and the other, which may be denoted by u_{1c} is calculated from equation (20) with the value of ξ given by (65), if the results of series expansion are accurate enough, these two values of u_1, i. e., u_{1s} and u_{1c} should be equal. On the other hand, if the results of the series expansion are not accurate enough, discrepancies between u_{1s} and u_{1c} will occur. We may use the expression

$$\Delta = \frac{u_{1s} - u_{1c}}{u_{1c}} \qquad (67)$$

as a criterion to determine the range of validity of the results of the series of expansion.

We found that for small values of t und s, say below $t \leq 10$, Δ is negligibly small. As s and t increase, Δ increases too. For instance

$$t = 15, \quad s = 21.38, \quad \Delta = 0.04,$$
$$t = 20, \quad s = 29.57, \quad \Delta = 0.11,$$
$$t = 30, \quad s = 49.23, \quad \Delta = 0.63.$$

Probably we may conclude that for $t \leq 20$ and $s \leq 30$, the results of the series expansion are accurate up to 10%. Above $t = 20$ and $s = 30$, the results of series expansion is poor, and we should use a numerical integration method to calculate the flow field, starting from the results of the series expansion.

7. Numerical Continuation of a Solution

We will assume that the solution is known by the series expansion method until the line AB along which $t =$ constant (Fig. 4). We then know the values of φ, u, p, ϱ and H at all points on the

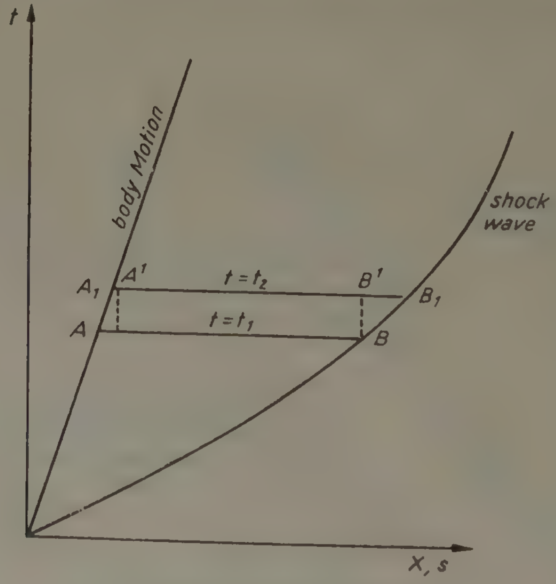


Fig. 4. Method of numerical continuation

line AB, and thus we can calculate the derivatives of p and H with respect to s at all interior points of the line AB. By equation (10), we can calculate $\partial u/\partial t$ in these points. As a result, we can determine u in all points from B' to A', e. g.

$$u_{B'} \cong u_B + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_B \Delta t \qquad (68).$$

The end conditions remain to be considered.

From equation (13) we have

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\gamma p_1}{\Phi}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\gamma p_1}{\Phi}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^\gamma \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\gamma p}{\Phi}\frac{\partial u}{\partial s} \quad (69).$$

From equation (14) we have

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_1}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{H_1}{\varrho_1}\frac{\varrho}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{H}{\Phi}\frac{\partial u}{\partial s} \quad (70).$$

At the end A, we suppose that $\varphi(0, t)$ is given. This will fix u at B_1.

The conditions at point B_1 may be determined approximately by the following manner:

From the value of ξ at B and the interval Δt, we may determine the location of B_1 which is approximately the location of shock on the line $t = t_2$. From the values of u and $\partial u/\partial s$ at B', we may determine the value of u at B, which is approximately u_1 on the line $t = t_2$. From this value of u_1 and equation (20) we determine the value ξ at B_1. After the value of ξ at B_1 is known, we may proceed further in a similar way.

We have applied this numerical integration method and found that when $t \leq 10$, the results of the numerical integration are practically the same as those of series expansion. As t increases, the errors of the results of series expansion increases. Usually the error in the values of pressure is larger than the corresponding error in velocity. When equation (67) is used to check the results of numerical integration, the error is negligibly small.

We started from $t = 20$ and found that the results of the numerical integration differ considerably from those of the series expansion. The new results are shown in Fig. 3 too. We find that the shock wave velocity obtained by the numerical integration is smaller than that found by series expansion. Since the larger value of the shock wave speed given by series expansion leads to inaccurate results, our numerical integration must be considered to be more reliable.

8. Conclusions

The propagation of the one dimensional flow produced by a strong shock in an infinitely conductive gas subjected to gravity and to a transverse magnetic field has been analyzed by means of the Lagrangian method. At first the method of series expansion has been worked out in detail. This method is applied to the case of shock wave in gas of constant temperature and under constant transverse magnetic field. The effect of the magnetic field is to increase the speed of shock wave in comparison with the corresponding case without magnetic field. Hence for the same motion of the body, the range of the flow field influenced by the shock wave with a magnetic field, is larger than that in the corresponding case without magnetic field.

A simple criterion is suggested to determine the range of validity of the results of the series expansion (67). It was found that the series expansion is valid in a rather large range. For $t = 20$, the error is about 10%. Beyond the range of the validity a method of numerical integration is given to calculate the flow field. The same criterion (67) is applied to the results of numerical integration. It is found that the error is negligibly small.

The characteristic of this problem in Eulerian method of description is also briefly described.

Acknowledgement

The author wishes to express his thanks to Professor J. M. Burgers for his inspiring discussions and his appreciation to Mr. A. Speth for his work in numerical calculations of this report.

References

[1] S. I. Pai, One dimensional unsteady flow of magneto-gas dynamics, Tech. Note BN-86, AFOSR-TN-56-537, AD 110356, Institute for Fluid Dynamics & Applied Mathematics, University of Maryland, 1956.

[2] R. E. Longhhead, Solution of problems involving in hydromagnetic flow of compressible ionized fluids, Phys. Rev. **99**, No. 6, September 15 (1955).

[3] The method applied in section 2, the series expansion in section 4 were given for the case without a magnetic field by J. M. Burgers in ,,Non-Uniform propagation of Shock Waves", Lecture series No. 10, prepared by S. I. Pai, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1951. They have been extended here to the case where a magnetic field is present, with some alterations at a few place. A different method for numerical continuation is used in this report from that of J. M. Burgers.

[4] S. I. Pai, On exact solution of one dimensional flow equations of magneto-gas dynamics, Tech. Note BN-82, AFOSR-TN-56-486, AD 97370, Institute for Fluid Dynamics & Applied Mathematics, University of Maryland (1956).

Manuskripteingang: 10. 3. 1958

Anschrift: S. I. Pai, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, Maryland (USA)

 ZAMM 39 (1959) Heft 1/2, Seite 50—67

Asymptotische Gesetze der turbulenten Ausbreitung von Heißluftstrahlen in bewegter und ruhender Außenluft

Von W. Szablewski

Auf der Grundlage des Prandtlschen Schubspannungsansatzes für freie Turbulenz werden die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder runder und ebener Heißluftstrahlen in bewegter und ruhender Außenluft für große axiale Abstände von der Düsenmündung explizit mittels der Ähnlichkeitshypothese berechnet. Der Vergleich mit Messungen runder Heißluftstrahlen ergibt befriedigende Übereinstimmung. Besonders hervorzuheben ist dabei das Ergebnis, daß sich der empirische Koeffizient $\varkappa_1$ der Theorie für das Modell eines runden Düsenstrahls von der Mündung bis zur Asymptote praktisch als eine Konstante erweist.

The Prandtl expression for the moved shearing stress for free turbulence is used to compute according to similarity, the velocity and temperature fields of hot air jets both for circular and for slit-like cross-section for large axial distances from the nozzle. The results obtained for circular cross-section agree quite well with the experimental results. Special mention deserves the fact that the empirical coefficient $\varkappa_1$, appearing in the theory, for the jet with circular cross-section is practically constant along the line from nozzle to infinity.

Sur la base de la disposition de frottement turbulent selon Prandtl pour la turbulence libre les champs de vitesse et de température de jets circulaires ou plans d'air chaud dans l'air extérieur agité ou calme sont calculés de façon explicite pour de grandes distances axiales de la bouche d'une tuyère au moyen de l'hypothèse analogique. La comparaison avec des mesures de jet circulaires d'air chaud a pour résultat un accord satisfaisant. Il y faut souligner avant tout le résultat disant que pour le modèle d'un jet circulaire de tuyère de la bouche jusqu'à l'asymptote le coefficient $\varkappa_1$ empirique de la théorie se trouve être pratiquement une constante.

На основании приема Прандтля, исходящего из напряжения сдвига, для свободной турбулентности вычисляются поля скоростей и температуры круглых и плоских струй горячего воздуха в движущейся и покоющейся внешней воздушной среде для больших осевых расстояний от выхода сопла; это осуществляется при помощи теории подобия. Сравнение с измерениями на круглых струях горячего воздух дает удовлетворительные результаты относительно согласия с опытом. Отчасти следует подчеркнуть, что в результате исследований эмпирический коэффициент $\varkappa_1$ теории для модели круглой сопловой струи от выхода сопла до асимптоты оказывается практически постоянной величиной.

I. Einleitung

Untersucht werden die durch turbulente Mischung mit der umgebenden Luft erzeugten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder von Heißluftstrahlen in sehr großem axialem Abstand von der Düsenmündung. Den Ausgang der Untersuchung bilden die vom Verf.[1]) aufgestellten Gleichungen zur Berechnung turbulenter Strömungen von Gasen stark veränderlicher Dichte, die sich hier — wenigstens für die Bewegungsgleichungen in der Richtung der Strahlachse — auf die bekannten Gleichungen für Felder konstanter Dichte reduzieren, für welche die asymptotischen Gesetze im wesentlichen schon ermittelt worden sind[2])[3])[4]). Demgemäß werden wir hier die schon bekannten funktionalen Formen erhalten, welche das axiale Verhalten und die Profile des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes beschreiben. Dennoch ist es nicht so, daß man sich mit dieser Feststellung begnügen könnte, denn die in diesen Funktionen auftretenden Beiwerte, die mittels Heranziehung der Erhaltungssätze des Impulses und der Energie bestimmbar sind, zeigen eine wesentliche Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz zwischen dem austretenden Heißluftstrahl und der umgebenden Luft. Dieses Ergebnis war insofern von vornherein zu erwarten, als bei der Vernachlässigung molekularer Wirkungen das Feld auch in der Asymptote als eine Mischung von individuellen heißeren und kälteren bzw. leichteren und schwereren Partikeln erscheint.

Die weitere Untersuchung fußt dann auf der Ähnlichkeitshypothese, d. h. auf der Annahme, daß die Profile der Geschwindigkeits- bzw. Temperaturverteilung über den Schnitten senkrecht zur Strahlachse zueinander affin sind. Diese Hypothese wird dadurch gerechtfertigt, daß für große axiale Abstände der Einfluß der charakteristischen Länge des Düsendurchmessers oder der Düsenspaltbreite als vernachlässigbar anzusehen ist: in der Asymptote erscheinen die Düsenmündungen als Punkt oder Linie.

Der in Abschnitt V für die Asymptote der turbulenten Ausbreitung rotationssymmetrischer Heißluftstrahlen durchgeführte Vergleich mit dem Experiment zeigt gute Übereinstimmung. Von grundsätzlicher Bedeutung ist dabei, daß der sich für den empirischen Koeffizienten $\varkappa_1$ der Theorie ergebende Zahlenwert nur wenig verschieden ist von dem Wert, den die Untersuchung[5]) der Mischzone turbulenter ebener Heißluftstrahlen, die zunächst durch eine Scheide-

[1]) W. Szablewski, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 67.
[2]) W. Tollmien, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 468.
[3]) H. Görtler, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 244.
[4]) H. Schlichting, Grenzschichttheorie. Karlsruhe 1951.
[5]) W. Szablewski, Ing.-Arch. 25 (1957), S. 10.

wand getrennt sind und sich dann mischen, ergab, wobei zu bemerken ist, daß das letztere Modell das Feld an der Düsenmündung beschreibt. Damit wird erhärtet (vgl. Abschnitt IV), daß der *Prandtl*sche Ansatz für den Austausch von Strömungen der freien Turbulenz als sachgemäß anzusehen ist.

II. Bewegungsgleichungen

Wir zeigen zunächst, daß die Bewegungsgleichungen in der Hauptströmungsrichtung sich für sehr große axiale Abstände von der Düsenmündung auf die Gleichungen für Felder konstanter Dichte reduzieren[6]).

Im rotationssymmetrischen Fall (runder Düsenstrahl) wird das turbulente, im zeitlichen Mittel stationäre, Mischungsfeld bei Vernachlässsigung von Gliedern kleinerer Größenordnung[7]) durch folgende Gleichungen[8]) beschrieben:

Impuls

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}\,\bar{v}}{\partial r} = \varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\bar{\varrho}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + E\,r\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial r}\right) \quad \text{(I)},$$

Energie

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\overline{c_p\,T}\,\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\overline{c_p\,T}\,\bar{v}}{\partial r} = E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c_p\,T}}{\partial r}\right) \quad \text{(II)},$$

Masse

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{v}}{\partial r} = E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial r}\right) \quad \text{(III)}.$$

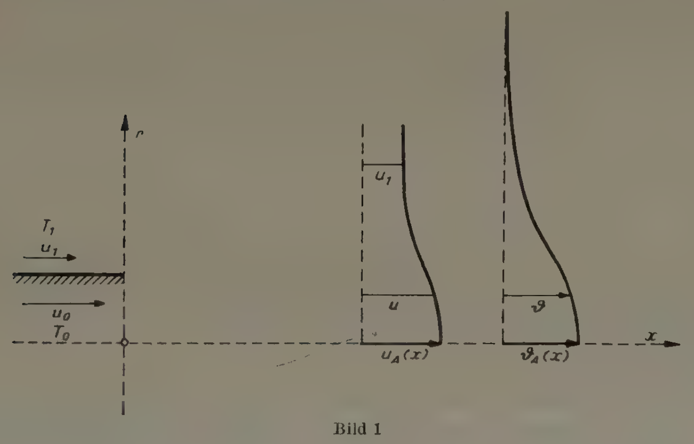


Bild 1

Hierbei bedeuten x, r Zylinderkoordinaten, u bzw. v die Geschwindigkeitskomponenten in der x- bzw. r-Richtung, ϱ die Dichte, T die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck; E ist eine empirische Zahl, die das Übertragungsverhältnis von substantiellen Eigenschaften und der (Druckschwankungen während des Transports ausgesetzten) Geschwindigkeit beim turbulenten Austausch angibt. Das Überstreichen bedeutet zeitliche Mittelwerte; im folgenden lassen wir die Querstriche fort.

Die scheinbare kinematische Zähigkeit wird hier durch

$$\varepsilon(x) = \varkappa_1\,b_1(x)\,(u_A(x) - u_1) \qquad (u_A(x) > u_1) \quad \text{(IV)}$$

beschrieben, wo $\varkappa_1$ ein empirischer Koeffizient, $b_1(x)$ die (halbe) Mischbreite des Geschwindigkeitsfeldes, $u_A(x)$ die Geschwindigkeit des Düsenstrahls längs der Strahlachse bedeuten; u_0 bzw. u_1 bezeichnen die Geschwindigkeit und T_0 bzw. T_1 die Temperatur des austretenden Düsenstrahls bzw. der umgebenden Luft.

Die Größe c_p wird als Konstante angesehen.

Beachtet man (III), so können wir bei Einführung der Übertemperatur $\vartheta = T - T_1$ das Gleichungssystem (I)—(III) auch schreiben:

Impuls

$$r\,\varrho\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} + r\,\varrho\,v\,\frac{\partial u}{\partial r} = \varepsilon(x)\left\{\varrho\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \underline{(E+1)\,r\,\frac{\partial \varrho}{\partial r}\,\frac{\partial u}{\partial r}}\right\} \quad \text{(V)},$$

[6]) Diese Feststellung ist nicht etwa trivial. Zwar wird in der Asymptote per definitionem die Differenz der Dichten von Strahl und Umgebung klein. Dasselbe gilt aber auch für die Differenz der Geschwindigkeiten von Strahl und Umgebung, so daß es von vornherein nicht feststeht, ob der Temperatureffekt in der Asymptote vernachlässigbar ist.

[7]) Dabei setzen wir voraus, daß die äußere Luftströmung unter keinem Druckgradienten steht.

[8]) Vgl. z. B. W. Szablewski, Ing.-Arch. **26** (1958), S. 358.

Energie

$$r\,\varrho\,u\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+r\,\varrho\,v\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}=E\,\varepsilon(x)\left\{\varrho\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+\underline{2\,r\,\frac{\partial\varrho}{\partial r}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}}\right\}\quad\text{(VI)},$$

Masse

$$\frac{\partial x\,u}{\partial x}+\frac{\partial r\,v}{\partial r}=0\quad\text{(VII)}.$$

Gegenüber dem Feld konstanter Dichte treten die unterstrichenen Glieder zusätzlich auf.

Für sehr große axiale Abstände von der Düsenmündung haben wir nun $\varrho\approx\varrho_1$ (Dichte der umgebenden Luft), $u\approx u_1$, und damit sind $\partial\varrho/\partial r$ sowie $\partial u/\partial r$ als kleine Größen anzusehen. In der Asymptote sind demgemäß die unterstrichenen Glieder in Gl. (V) und Gl. (VI), die den Temperatureffekt enthalten, offenbar vernachlässigbar.

In entsprechender Weise ergibt sich der gleiche Sachverhalt für ebene Strömungen.

III. Asymptotische Felder der Geschwindigkeit und Temperatur

Wir behandeln zunächst den Fall runder Düsenstrahlen.

A. Rotationssymmetrische Strömung

Nach Abschn. II lauten die Bewegungsgleichungen:

Impuls

$$r\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)\quad\text{(VIII)},$$

Energie

$$r\left(u\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)=E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)\quad\text{(IX)},$$

Masse

$$\frac{\partial r u}{\partial x}+\frac{\partial r v}{\partial r}=0\quad\text{(X)}.$$

Wir werden hier die Fälle bewegter und ruhender Außenluft zu unterscheiden haben.

1. Bewegte Außenluft ($u_1\neq 0$)

Wir wollen die anzuwendende Methode an Hand dieses Falles, der auch für Felder konstanter Dichte noch nicht behandelt worden zu sein scheint, ausführlich darstellen.

Geschwindigkeitsfeld:

Unter Einführung der dimensionslosen Größen

$$\frac{u}{u_0-u_1}=\frac{u-u_1}{u_0-u_1}+\frac{u_1}{u_0-u_1},\qquad\frac{v}{u_0-u_1}\quad\text{und}\quad\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\quad\text{mit}\quad\vartheta_0=T_0-T_1$$

machen wir den Ähnlichkeitsansatz:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{u-u_1}{u_0-u_1}=\frac{u_A(x)-u_1}{u_0-u_1}\,\varphi(\eta)\,,\qquad\eta=\frac{r/r_0}{(x/r_0)^n}\quad(r_0\ \text{Düsenradius});\qquad\frac{v}{u_0-u_1}=\left(\frac{x}{r_0}\right)^p\psi(\eta);\\&\text{wir setzen dabei}\qquad\frac{u_A(x)-u_1}{u_0-u_1}=U\left(\frac{x}{r_0}\right)^m,\qquad\frac{b_1}{r_0}=B\left(\frac{x}{r_0}\right)^n\end{aligned}\right\}\text{(1.1)}.$$

Mit den Transformationsformeln

$$\left.\frac{\partial}{\partial r/r_0}\right|_{x/r_0}=\frac{1}{(x/r_0)^n}\left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_{x/r_0},\qquad\left.\frac{\partial}{\partial x/r_0}\right|_{r/r_0}=\left.\frac{\partial}{\partial x/r_0}\right|_{\eta}-\frac{n}{x/r_0}\,\eta\left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_{x/r_0}$$

erhalten wir dann mit der asymptotischen Beziehung $u\approx u_1$ für Gl. (VIII)

$$\frac{u_1}{u_0-u_1}\left(\frac{x}{r_0}\right)^{m-1}\left(m\,\varphi-n\,\eta\,\frac{d\varphi}{d\eta}\right)+\left(\frac{x}{r_0}\right)^{p+m-n}\psi\,\frac{d\varphi}{d\eta}=\left(\frac{x}{r_0}\right)^{2m-n}\varkappa_1\,B\,U\left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\,\frac{d\varphi}{d\eta}\right)\quad(1.2)$$

und für Gl. (X)

$$\left(\frac{x}{r_0}\right)^{m+n-1}U\left(m\,\eta\,\varphi-n\,\eta^2\,\frac{d\varphi}{d\eta}\right)+\left(\frac{x}{r_0}\right)^p\left(\psi+\eta\,\frac{d\psi}{d\eta}\right)=0\quad(1.3).$$

Vergleich der Potenzen von x/r_0 ergibt

$$m-1 = p+m-n = 2m-n\text{*)} \quad \text{und} \quad m+n-1 = p\,.$$

Eine weitere Gleichung für die Exponenten liefert der Impulsintegralsatz

$$\int_0^\infty \varrho\, u\,(u-u_1)\, r\, dr = \varrho_0\, u_0\,(u_0-u_1)\,\frac{r_0^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.4).$$

Für die Asymptote mit

$$u \approx u_1\,, \qquad \frac{\varrho}{\varrho_0} \approx \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = 1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\,,$$

sowie dem Ähnlichkeitsansatz Gl. (1.1) ergibt er

$$\left(\frac{x}{r_0}\right)^{m+2n} U \int_0^\infty \eta\,\varphi\, d\eta = \frac{1}{2}\,\frac{u_0}{u_1}\,\frac{1}{1+(\vartheta_0/T_1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.5),$$

also

$$m = -2n\,.$$

Physikalisch sinnvoll ist nur eine Lösung mit $n > 0$ sowie $m < 0$, $p < 0$. Man erhält eindeutig

$$n = \frac{1}{3}\,; \qquad m = -\frac{2}{3}\,, \qquad p = -\frac{4}{3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.6).$$

Die demgemäß aus Gl. (1.2) folgende Gleichung

$$-2\,\eta\,\varphi - \eta^2\,\frac{d\varphi}{d\eta} = 3\,\varkappa_1\, B\, U\,\frac{u_0-u_1}{u_1}\left(\eta\,\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{d\varphi}{d\eta}\right)$$

mit den Randbedingungen $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$ hat die Lösung

$$\varphi = e^{-(\sigma\,\eta)^2} \quad \text{mit} \quad \sigma^2 = \frac{1}{6\,\varkappa_1\, B\, U\,(u_0-u_1)/u_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.7);$$

die aus Gl. (1.3) folgende Gleichung

$$\frac{U}{3}\left(2\,\eta\,\varphi + \eta^2\,\frac{d\varphi}{d\eta}\right) = \psi + \eta\,\frac{d\psi}{d\eta}$$

mit der Randbedingung $\psi(0) = 0$ wird gelöst durch

$$\sigma\,\psi = \frac{U}{3}\,\sigma\,\eta\, e^{-(\sigma\,\eta)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.8).$$

Für den Streckungsfaktor σ gewinnen wir noch eine weitere wichtige Beziehung aus dem Impulsintegralsatz. Gehen wir mit Gl. (1.7) in Gl. (1.5) ein, so folgt

$$\sigma^2 = U\,\frac{u_1}{u_0}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.9).$$

In dem erhaltenen Formelsystem treten die drei Beiwerte B, U und σ auf. Zu ihrer Bestimmung haben wir zunächst die in Gl. (1.7) gegebene Definitionsgleichung für σ sowie Gl. (1.9). Eine dritte Gleichung erhalten wir durch das Ablesen der Breite des berechneten Profils Gl. (1.7):

$$(\sigma\,\eta)_{Breite} = \sigma\,\frac{b_1/r_0}{(x/r_0)^{1/3}} = \sigma\, B \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.10).$$

Die drei Beiwerte berechnen sich dann zu

$$\sigma = \frac{1}{(6\,\varkappa_1\,\sigma\, B)^{1/3}}\,\frac{(u_1/u_0)^{2/3}}{\left(\dfrac{u_0-u_1}{u_0}\right)^{1/3}}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.11),$$

$$U = \frac{1}{(6\,\varkappa_1\,\sigma\, B)^{2/3}}\,\frac{(u_1/u_0)^{1/3}}{\left(\dfrac{u_0-u_1}{u_0}\right)^{2/3}}\,\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.12),$$

$$\varkappa_1\, B = \frac{1}{6}\,(6\,\varkappa_1\,\sigma\, B)^{4/3}\,\frac{\left(\dfrac{u_0-u_1}{u_0}\right)^{1/3}}{(u_1/u_0)^{2/3}}\,\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.13).$$

*) Dabei ist zuzulassen, daß die eine oder andere Potenz von x/r_0 gegenüber den anderen vernachlässigbar ist; im vorliegenden Beispiel ist das — siehe unten — die Potenz $(x/r_0)^{p+m-n}$.

Dieses Formelsystem, das in seiner Aussage ursächlich an die *Prandtl*sche Formulierung des turbulenten Austausches gebunden ist, legt nun zusammen mit Gl. (1.7) und Gl. (1.8) das Strömungsfeld der Asymptote in allen Einzelheiten fest. Dabei nehmen wir an, daß unter sonst gleichen Versuchsbedingungen (vgl. Abschn. IV) $\varkappa_1$ eine Konstante ist, die unabhängig von den Strömungsparametern $(u_0 - u_1)/u_0$ und ϑ_0/T_1 ist.

Die Mischbreite des Geschwindigkeitsfeldes sowie der Abfall der Strahlgeschwindigkeit längs der Achse hängen demnach sehr wesentlich davon ab, ob es sich um einen Heißluftstrahl handelt oder nicht.

Man kann aus den Gleichungen u. a. ablesen, daß für heißere Düsenstrahlen einerseits der Abfall der Geschwindigkeit längs der Achse schneller erfolgt und andererseits die Mischbreiten kleiner sind. Der in Abschn. V durchgeführte Vergleich mit dem Experiment wird eine Bestätigung dieser Aussagen ergeben.

Temperaturfeld:

Der Ähnlichkeitsansatz lautet

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta}{\vartheta_0} &= \frac{\vartheta_A(x)}{\vartheta_0}\,\chi(\eta)\,, \qquad \eta = \frac{r/r_0}{(x/r_0)^{1/3}}\,; \\ \text{wir setzen dabei} \qquad \frac{\vartheta_A(x)}{\vartheta_0} &= T\,(x/r_0)^{m^*} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1.14).$$

Der Energieintegralsatz

$$\int_0^\infty \varrho\, u\, \vartheta\, r\, dr = \varrho_0\, u_0\, \vartheta_0\, \frac{r_0^2}{2} \quad \ldots \quad (1.15)$$

liefert in der Asymptote und mit dem Ansatz Gl. (1.14)

$$\left(\frac{x}{r_0}\right)^{m^* + 2n} T \int_0^\infty \eta\, \chi\, d\eta = \frac{1}{2}\, \frac{u_0}{u_1}\, \frac{1}{1 + (\vartheta_0/T_1)} \quad \ldots \quad (1.16);$$

also

$$m^* = -2n = -\frac{2}{3}\,(= m) \quad \ldots \quad (1.17).$$

Gleichung (IX) ergibt dann für χ

$$-2\eta\,\chi - \eta^2 \frac{d\chi}{d\eta} = E\, 3\, \varkappa_1\, B\, U\, \frac{u_0 - u_1}{u_0}\left(\eta\, \frac{d^2\chi}{d\eta^2} + \frac{d\chi}{d\eta}\right)$$

mit den Randbedingungen

$$\chi(0) = 1\,, \qquad \chi(\infty) = 0$$

und der Lösung

$$\chi = \varphi^{\frac{1}{E}} = e^{-\frac{1}{E}(\sigma\,\eta)^2} \quad \ldots \quad (1.18).$$

Bezeichnen wir mit $b_2(x)$ die Mischbreite des Temperaturfeldes, so erhalten wir aus Gl. (1.18) unmittelbar für das Verhältnis der Mischbreiten

$$\frac{b_2}{b_1} = \sqrt{E} \quad \ldots \quad (1.19).$$

Eine wichtige Relation folgt noch aus dem Energieintegralsatz. Gehen wir mit Gl. (1.18) in Gl. (1.16) ein, so kommt

$$\sigma^2 = E\, T\, \frac{u_1}{u_0}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right) \quad \ldots \quad (1.20).$$

Der Vergleich von Gl. (1.9) und Gl. (1.20) ergibt dann das Gesetz

$$\frac{T}{U} = \frac{1}{E} \quad \ldots \quad (1.21).$$

Man kann hier schon von einem Gesetz sprechen; denn Gl. (1.21) folgt aus den hypothesenfreien Erhaltungssätzen des Impulses und der Energie mittels des Ähnlichkeitsansatzes und der Relation $\chi = \varphi^{1/E}$. Beide letzteren Annahmen sind durch das Experiment mehrfach bestätigt worden; vgl. hierzu auch Abschn. V. Die Glockenkurve der Funktion φ nach Gl. (1.7) schließlich ermöglicht auf jeden Fall eine gute Approximation.

Wir berechnen noch die Fördermenge des Strahls

$$F = 2\pi \int_0^\infty \varrho\,(u - u_1)\, r\, dr \quad \ldots \quad (1.22)$$

bzw.

$$\frac{F}{F_0} = 2 \int_0^\infty \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} \frac{r}{r_0}\, d\frac{r}{r_0},$$

wo $F_0 = \varrho_0 (u_0 - u_1)\pi r_0^2$ die Treibmenge[9]) des Strahls ist. In der Asymptote ergibt die Integration mit $\frac{\varrho}{\varrho_0} \approx \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = 1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}$ und bei Einsetzen von Gl. (1.7) gemäß Gl. (1.1)

$$\frac{F}{F_0} = \frac{U}{\sigma^2}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)$$

bzw. nach Gl. (1.9)

$$\frac{F}{F_0} = \frac{u_0}{u_1} \quad \ldots \quad (1.23).$$

Die Fördermenge des Düsenstrahls nähert sich also asymptotisch einem konstantem Wert.

2. Ruhende Außenluft ($u_1 = 0$)

Hier liegt für das Geschwindigkeitsfeld konstanter Dichte die Lösung von H. Schlichting[10]) vor.

Mit dem Ähnlichkeitsansatz

$$\frac{u}{u_0} = \frac{U}{x/r_0}\varphi(\eta), \qquad \eta = \frac{r/r_0}{x/r_0}; \qquad \frac{v}{u_0} = \frac{1}{x/r_0}\psi(\eta) \quad \ldots \quad (2.1)$$

werden die Profile durch die Gleichung

$$-U\left(\varphi^2 + \eta\varphi\frac{d\varphi}{d\eta}\right) + \psi\frac{d\varphi}{d\eta} = \varkappa_1 B U\left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d\varphi}{d\eta}\right)$$

mit den Randbedingungen $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$ sowie durch die Gleichung

$$\psi + \eta\frac{d\psi}{d\eta} = U\eta\left(\varphi + \eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right)$$

mit der Randbedingung $\psi(0) = 0$ bestimmt, welche die Lösungen

$$\varphi = \frac{1}{[1 + (\sigma\eta)^2]^2} \quad \text{mit} \quad \sigma^2 = \frac{1}{8\varkappa_1 B}; \qquad \sigma\psi = \frac{U}{2}\sigma\eta\frac{1 - (\sigma\eta)^2}{[1 + (\sigma\eta)^2]^2} \quad \ldots \quad (2.2)$$

haben.

Der Impulsintegralsatz

$$\int_0^\infty \varrho\, u^2\, r\, dr = \varrho_0 u_0^2 \frac{r_0^2}{2} \quad \ldots \quad (2.3)$$

liefert uns wieder die Kennzeichnung des Heißluftstrahls mittels der asymptotischen Relation

$$\sigma^2 = \frac{U^2}{3}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right) \quad \ldots \quad (2.4).$$

Wir können dann wieder bei Ablesung der Breite σB des berechneten Profils φ die Beiwerte berechnen:

$$\sigma = \frac{1}{8\varkappa_1\sigma B} \quad \ldots \quad (2.5),$$

$$U = \frac{\sqrt{3}}{8\varkappa_1\sigma B}\frac{1}{\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/2}} \quad \ldots \quad (2.6),$$

$$\varkappa_1 B = \frac{1}{8}(8\varkappa_1\sigma B)^2 \quad \ldots \quad (2.7).$$

[9]) Bezeichnung nach W. Wuest, V.D.I. **92** (1950). S. 1000.
[10]) H. Schlichting, a. a. O.

Es fällt auf, daß hier — im Gegensatz zur Ausbreitung in bewegter Luft, vgl. Gl. (1.13) — die asymptotischen Mischbreiten nach Gl. (2.7) keine Abhängigkeit vom Temperaturparameter ϑ_0/T_1 aufweisen. Für das Temperaturfeld erhält man

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{T}{x/r_0}\,\chi(\eta) \quad \ldots \quad (2.8).$$

Das Profil wird durch die Gleichung

$$-U\,\varphi\left(\chi + \eta\,\frac{d\chi}{d\eta}\right) + \psi\,\frac{d\chi}{d\eta} = E\,\varkappa_1\,B\,U\left(\frac{d^2\chi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\,\frac{d\chi}{d\eta}\right)$$

mit den Randbedingungen $\chi(0) = 1$, $\chi(\infty) = 0$ bestimmt und lautet

$$\chi = \varphi^{1/E} = \frac{1}{[1 + (\sigma\,\eta)^2]^{2/E}} \quad \ldots \quad (2.9).$$

Der Energieintegralsatz

$$\int\limits_0^\infty \varrho\,u\,\vartheta\,r\,dr = \varrho_0\,u_0\,\vartheta_0\,\frac{r_0^2}{2} \quad \ldots \quad (2.10)$$

liefert die asymptotische Relation

$$\sigma^2 = \frac{U\,T}{1 + (2/E)}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right) \quad \ldots \quad (2.11).$$

Vergleicht man die beiden Relationen Gl. (2.4) und Gl. (2.11), so folgt

$$\frac{T}{U} = \frac{1 + (2/E)}{3} \quad \ldots \quad (2.12).$$

(Anmerkung: Sollte sich — wie derzeit nur der Vergleich mit dem Experiment zeigen kann — hier die Funktion $\varphi = e^{-(\sigma\,\eta)^2}$ als eine bessere Approximation erweisen, so würde durch Eingang mit dieser in die Integralsätze

$$\frac{T}{U} = \frac{1 + (1/E)}{2}$$

folgen.)

Für die Fördermenge

$$F = 2\,\pi \int\limits_0^\infty \varrho\,u\,r\,dr \quad \ldots \quad (2.13)$$

erhält man mit der Treibmenge $F_0 = \varrho_0\,u_0\,\pi\,r_0^2$ die asymptotische Relation

$$\frac{F}{F_0} = \frac{U}{\sigma^2}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)\frac{x}{r_0}$$

bzw. nach Gl. (2.5) und Gl. (2.6)

$$\frac{F}{F_0} = \sqrt{3}\,(8\,\varkappa_1\,\sigma\,B)\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/2}\frac{x}{r_0} \quad \ldots \quad (2.14).$$

Bemerkung

Der in Erscheinung tretende fundamentale Unterschied zwischen den Fällen bewegter und ruhender Außenluft, der einen Widerspruch gegen die zu fordernde stetige Änderung physikalischer Zustände anzuzeigen scheint, ist nur durch die Beschränkung auf die Asymptote bedingt. Der Widerspruch löst sich auf, wenn wir den Vorgang der turbulenten Ausbreitung eines Düsenstrahls als Ganzes betrachten:

Bei ruhender Außenluft wird der asymptotische Zustand bekanntlich bereits in verhältnismäßig kleinem Abstand von der Düsenmündung realisiert; vgl. Abschn. V. Lassen wir nun eine kleine Außengeschwindigkeit u_1 zu, so handelt es sich um eine kleine Störung jenes Zustandes, die erst in sehr großem Abstand — wo u_1 von gleicher Größenordnung wie die Strahlgeschwindigkeit ist — wirksam wird. Bis zu größeren Abständen von der Mündung haben wir also hier im wesentlichen den Status wie bei ruhender Außenluft zu erwarten; der asymptotische Zustand wird erst in sehr großem Abstand anzutreffen sein und verschwindet in der Grenze $u_1 \to 0$. Mit größer werdender Außengeschwindigkeit u_1 ist die Realisierung des asymptotischen Zustandes dann in kleineren Abständen zu erwarten; vgl. Abschn. V.

B. Ebene Strömung

Wir können uns im Folgenden kurz fassen.

Die asymptotischen Bewegungsgleichungen in der Hauptströmungsrichtung reduzieren sich, wie in Abschn. II dargelegt, auf die für ein Feld konstanter Dichte:

Impuls

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{(XI)},$$

Energie

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = E\, \varepsilon(x) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \text{(XII)},$$

Masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{(XIII)}.$$

x bedeutet dabei die Koordinate in Richtung der Strahlachse, y in der dazu senkrechten Richtung.

3. Bewegte Außenluft $(u_1 \neq 0)$

Wir machen wieder den Ähnlichkeitsansatz

$$\frac{u - u_1}{u_0 - u_1} = \frac{u_A(x) - u_1}{u_0 - u_1} \varphi(\eta), \qquad \eta = \frac{y/d}{(x/d)^n} \quad (d \text{ halbe Spaltbreite}),$$

$$\frac{v}{u_0 - u_1} = \left(\frac{x}{d}\right)^p \psi(\eta);$$

dabei setzen wir

$$\frac{u_A(x) - u_1}{u_0 - u_1} = U \left(\frac{x}{d}\right)^m, \qquad \frac{b_1}{d} = B \left(\frac{x}{d}\right)^n \quad (3.1).$$

Der Vergleich der Exponenten von x/d an Hand der Bewegungsgleichungen (XI) und (XIII) sowie des Impulsintegralsatzes ergibt

$$n = \frac{1}{2}; \qquad m = -\frac{1}{2}; \qquad p = -1 \quad (3.2).$$

Für das symmetrische Profil $\varphi(\eta)$ folgt aus (XI) die Gleichung

$$-\frac{1}{2}\left(\varphi + \eta \frac{d\varphi}{d\eta}\right) = \varkappa_1\, B\, U \frac{u_0 - u_1}{u_1} \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}$$

mit den Randbedingungen

$$\varphi(0) = 1\,, \quad \varphi(\infty) = 0\,;$$

die Lösung lautet

$$\varphi = e^{-(\sigma\eta)^2} \quad \text{mit} \quad \sigma^2 = \frac{1}{4\,\varkappa_1\, B\, U\, (u_0 - u_1)/u_1} \quad (3.3).$$

Für das Profil $\psi(\eta)$ erhält man die Gleichung

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \frac{U}{2}\left(\varphi + \eta \frac{d\varphi}{d\eta}\right)$$

mit der Randbedingung $\psi(0) = 0$ und der Lösung

$$\sigma\psi = \frac{U}{2} \sigma\eta\, e^{\;(\sigma\eta)^2} \quad (3.4).$$

Der Impulsintegralsatz

$$\int\limits_0^\infty \varrho\, u\, (u - u_1)\, dy = \varrho_0\, u_0\, (u_0 - u_1)\, d \quad (3.5)$$

ergibt dann die asymptotische Relation

$$\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} U \frac{u_1}{u_0}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right) \quad (3.6).$$

Die Beiwerte ergeben sich zu

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\varkappa_1\,\sigma B}\right)^{1/2} \frac{u_1/u_0}{\left(\frac{u_0 - u_1}{u_0}\right)^{1/2}} \left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/2} \qquad (3.7),$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\varkappa_1\,\sigma B}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{u_0 - u_1}{u_0}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/2}} \qquad (3.8),$$

$$\varkappa_1 B = \sqrt{\pi}\left(\frac{2\,\varkappa_1\,\sigma B}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} \frac{\left(\frac{u_0 - u_1}{u_0}\right)^{1/2}}{u_1/u_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/2}} \qquad (3.9)$$

und zeigen die Abhängigkeit des asymptotischen Strömungsfeldes von dem den Heißluftstrahl charakterisierenden Parameter ϑ_0/T_1.

Für das Temperaturfeld erhält man mittels des Ansatzes

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{\vartheta_A(x)}{\vartheta_0}\,\varkappa(\eta)$$

aus dem Energieintegralsatz (3.13)

$$\frac{\vartheta_A(x)}{\vartheta_0} = T\left(\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \qquad (3.10).$$

Gl. (XII) ergibt für das symmetrische Profil χ die Gleichung

$$-\frac{1}{2}\left(\chi + \eta\frac{d\chi}{d\eta}\right) = E\,\varkappa_1\,B\,U\,\frac{u_0 - u_1}{u_1}\,\frac{d^2\chi}{d\eta^2}$$

mit den Randbedingungen $\chi(0) = 1$, $\chi(\infty) = 0$ und der Lösung

$$\chi = \varphi^{\frac{1}{E}} = e^{-\frac{1}{E}(\sigma\eta)^2} \qquad (3.11)$$

aus der für das Verhältnis der Mischbreiten des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes folgt

$$\frac{b_2}{b_1} = \sqrt{E} \qquad (3.12).$$

Der Energieintegralsatz

$$\int\limits_0^\infty \varrho\,u\,\vartheta\,dy = \varrho_0\,u_0\,\vartheta_0\,d \qquad (3.13)$$

liefert dann asymptotisch

$$\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{E}\,T\,\frac{u_1}{u_0}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right) \qquad (3.14).$$

Aus dem Vergleich von Gl. (3.6) und (3.14) folgt die Beziehung

$$\frac{T}{U} = \frac{1}{\sqrt{E}} \qquad (3.15),$$

der — wie der entsprechenden Formel (1.21) des rotationssymmetrischen Falles — wieder eine gewisse Allgemeingültigkeit zukommt.

Für die Fördermenge

$$F = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho\,(u - u_1)\,dy \qquad (3.16)$$

erhält man mit der Treibmenge $F_0 = \varrho_0\,(u_0 - u_1)\,2\,d$ asymptotisch

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{U}{\sigma}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)$$

bzw. nach Gl. (3.6)

$$\frac{F}{F_0} = \frac{u_0}{u_1} \qquad (3.17).$$

4. Ruhende Außenluft ($u_1 = 0$)

Hier liegt für das Geschwindigkeitsfeld konstanter Dichte die Lösung von H. Görtler[11]) vor.

$$\frac{u}{u_0} = \frac{U}{(x/d)^{1/2}}\,\varphi(\eta), \qquad \eta = \frac{y/d}{x/d}; \qquad \frac{v}{u_0} = \frac{1}{(x/d)^{1/2}}\,\psi(\eta) \quad \ldots\ldots \quad (4.1).$$

Die symmetrischen Profile werden durch die Gleichungen

$$-U\varphi\left(\frac{\varphi}{2} + \eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) + \psi\frac{d\varphi}{d\eta} = \varkappa_1 B U \frac{d^2\varphi}{d\eta^2},$$

Randbedingungen $\varphi(0) = 1,\ \varphi(\infty) = 0;$

und

$$\frac{d\psi}{d\eta} = U\left(\frac{\varphi}{2} + \eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right), \qquad \text{Randbedingung } \psi(0) = 0$$

bestimmt.

Die Lösungen lauten

$$\varphi = \mathfrak{Cof}^{-2}(\sigma\eta) \quad \text{mit} \quad \sigma^2 = \frac{1}{4\varkappa_1 B}, \qquad \sigma\psi = U\left(\sigma\eta\,\mathfrak{Cof}^{-2}(\sigma\eta) - \frac{1}{2}\mathfrak{Tg}(\sigma\eta)\right) \quad (4.2).$$

Der Impulsintegralsatz

$$\int_0^\infty \varrho\, u^2\, dy = \varrho_0\, u_0^2\, d \quad \ldots\ldots \quad (4.3)$$

ergibt dann asymptotisch

$$\sigma = \frac{2}{3}U^2\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4.4).$$

Es folgen die Formeln

$$\sigma = \frac{1}{4\varkappa_1\sigma B} \quad \ldots\ldots \quad (4.5),$$

$$U = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{(4\varkappa_1\sigma B)^{1/2}}\,\frac{1}{(1 + \vartheta_0/T_1)^{1/2}} \quad \ldots\ldots \quad (4.6),$$

$$\varkappa_1 B = \frac{1}{4}(4\varkappa_1\sigma B)^2 \quad \ldots\ldots \quad (4.7).$$

Temperaturfeld:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{T}{(x/d)^{1/2}}\,\chi(\eta) \quad \ldots\ldots \quad (4.8)$$

mit der Gleichung

$$-U\varphi\left(\frac{\chi}{2} + \eta\cdot\frac{d\chi}{d\eta}\right) + \psi\frac{d\chi}{d\eta} = E\varkappa_1 B U\frac{d^2\chi}{d\eta^2}$$

und den Randbedingungen $\chi(0) = 1,\ \chi(\infty) = 0$.

Nach H. Reichardt[12]) haben wir die Lösung

$$\chi = \varphi^{1/E} = \mathfrak{Cof}^{-2/E}(\sigma\eta) \quad \ldots\ldots \quad (4.9).$$

Der Energieintegralsatz

$$\int_0^\infty \varrho\, u\,\vartheta\, dy = \varrho_0\, u_0\, \vartheta_0\, d \quad \ldots\ldots \quad (4.10)$$

ergibt asymptotisch

$$\sigma = U T\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)\int_0^\infty \mathfrak{Cof}^{-2\left(1+\frac{1}{E}\right)}(\xi)\, d\xi \quad \ldots\ldots \quad (4.11),$$

und der Vergleich von Gl. (4.4) und (4.11) liefert die Beziehung

$$\frac{T}{U} = \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty \mathfrak{Cof}^{-2\left(1+\frac{1}{E}\right)}(\xi)\, d\xi\right)^{-1} \quad \ldots\ldots \quad (4.12).$$

---

[11]) H. Görtler, a. a. O.

[12]) H. Reichardt, Z. angew. Math. Mech. **24** (1944), S. 268.

Nach vorliegenden Messungen, vgl. auch Abschn. V, haben wir bei der Mischung von Heißluftstrahlen für das Übertragungsverhältnis den Zahlenwert $E = 2$. Aus Gl. (4.12) folgt dann

$$\frac{T}{U} = \frac{8}{3}\,\frac{1}{\pi} \qquad (\approx 0{,}849) \quad \ldots\ldots \quad (4.13).$$

(Anmerkung: Approximiert man in den Integralsätzen durch die Funktion $\varphi = e^{-(\sigma\eta)^2}$, so erhält man mit $E = 2$

$$\frac{T}{U} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\approx 0{,}866)\,,$$

also fast denselben Wert.)

Für die Fördermenge

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho\, u\, dy \quad \ldots\ldots \quad (4.14)$$

ergibt sich mit der Treibmenge $F_0 = \varrho_0\, u_0\, 2\, d$ die asymptotische Formel

$$\frac{F}{F_0} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,(4\,\varkappa_1\,\sigma B)^{1/2}\left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\right)^{1/2}\left(\frac{x}{d}\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (4.15).$$

IV. Der Prandtlsche Ansatz für den turbulenten Austausch bei freier Turbulenz

In voller Allgemeinheit kann man im Fall konstanter Dichte (bei ebener oder rotationssymmetrischer Strömung) offenbar für die turbulente Schubspannung setzen

$$\tau = \varrho\, \varepsilon(x, y)\, \frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha);$$

dabei soll bei Betrachtung von Strömungen der freien Turbulenz x die Hauptströmungsrichtung, y die dazu senkrechte Richtung bezeichnen. Das Symbol $\varepsilon(x, y)$ bedeutet die sog. scheinbare kinematische Zähigkeit.

1. Die erste wesentliche Aussage des *Prandtl*schen Ansatzes ist, daß man für Schnitte senkrecht zur x-Achse sich mit Mittelwerten des turbulenten Austausches begnügen kann:

$$\bar{\varepsilon}(x, y) = \varepsilon(x) \quad \ldots\ldots \quad (\beta).$$

Dieser Ansatz hat seine Tragfähigkeit an Hand der bekannten guten Übereinstimmung der so berechneten theoretischen Profile der Geschwindigkeitsverteilung mit dem Experiment erwiesen.

2. Hat man den Mittelwert $\varepsilon(x)$ akzeptiert, so verbleiben als bestimmende physikalische Faktoren offenbar nur die Mischbreite $b_1(x)$ und die Geschwindigkeitsspanne $u_{max} - u_{min}$. Aus dimensionsanalytischen Gründen folgt dann sofort

$$\varepsilon(x) = \varkappa_1\, b_1(x)\,|u_{max} - u_{min}| \quad \ldots\ldots \quad (\gamma),$$

also der bekannte *Prandtl*sche[13]) Ansatz mit dem dimensionslosen empirischen Koeffizienten $\varkappa_1$.

3. Da es sich bei obigem Ansatz um eine Mittelwertbildung handelt, ist von vornherein nicht zu erwarten, daß der Koeffizient $\varkappa_1$ für die Gesamtheit eines Strömungsvorganges, also z. B. für einen Düsenstrahl von der Mündung bis zur Asymptote, gleich einer Konstanten wäre. Doch wird man, wenn andererseits dem Ansatz eine Bedeutung zugemessen werden soll, erwarten dürfen, daß dieser Umstand nur geringe Schwankungen des Zahlenwertes von $\varkappa_1$ zur Folge hat.

Weiter ist zu bemerken, daß nach (γ) Schwankungen von $\varkappa_1$ dadurch bedingt werden dürften, daß die Festlegung eines Maßes für die Mischbreite der längs des Strömungsvorganges variierenden Profile, die mit gegen $\pm\infty$ wachsender Querkoordinate y nach Null abklingen, einer gewissen Willkür unterliegt. Aber auch hier dürfte zu erwarten sein, daß die Schwankungen sich in engen Grenzen halten.

Insgesamt gesehen, sollte $\varkappa_1$ den Charakter einer Modellkonstanten haben.

Dagegen ist nicht zu erwarten, daß $\varkappa_1$ den Charakter einer universellen Konstanten hat. Die Verhältnisse dürften hier ähnlich liegen wie bei dem Koeffizienten $\varkappa$ des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes turbulenter Grenzschichten, für den die ermittelten Zahlenwerte eine merkbare Streuung zeigen, wenn sie auch in der Mehrzahl den Wert $\varkappa \approx 0{,}4$ ergeben. Doch läßt sich zur Zeit wenig dazu sagen.

[13]) L. Prandtl, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 241.

V. Vergleich mit Messungen

Messungen von Heißluftstrahlen sind bisher anscheinend nur für runde Düsenstrahlen durchgeführt worden, auf die sich der Vergleich beschränkt[14]).

Die Untersuchung der turbulenten Vermischung ebener Heißluftstrahlen[15]) — also des Modells, das durch das Mischungsfeld in unmittelbarer Nähe der Düsenkante realisiert wird — hatte bei Ablesung der Breite σB zwischen den Grenzen 0,95 und 0,05 den Zahlenwert $\varkappa_1 = 0{,}0082$ ergeben. Das genannte Maß der Breite σB behalten wir im Folgenden bei. Der hier gezogene Vergleich mit Messungen der turbulenten Ausbreitung rotationssymmetrischer Heißluftstrahlen in größeren axialen Abständen bei sowohl ruhender wie bewegter Außenluft ergibt dann das bemerkenswerte Resultat, daß in der Asymptote nur ein geringfügig von der genannten Zahl 0,0082 abweichender Wert des Koeffizienten $\varkappa_1$ anzunehmen ist, was nach den Erörterungen von Abschn. IV den *Prandtl*schen Ansatz als sachgemäß erscheinen läßt.

Wir wollen noch hinsichtlich des Vergleiches mit dem Experiment bemerken, daß allerdings gerade die für die asymptotische Theorie interessanten kleinen Werte der Geschwindigkeits- und Temperaturdifferenz des Strahls gegenüber dem umgebenden Medium in größeren axialen Abständen nur schwer meßbar und daher oft mit Unsicherheit behaftet sind.

A. Ruhende Außenluft ($u_1 = 0$)

Hier liegen die Messungen von S. Corrsin und M. S. Uberoi[16]) an Heißluftstrahlen mit der Übertemperatur $\vartheta_0 = 15°$, 170° und 300° C gegenüber der Außenluft bzw.

$$\frac{\vartheta_0}{T_1} = 0{,}05 \qquad 0{,}57 \qquad 1{,}0$$

vor.

Der Vergleich ergibt hier

$$\underline{\varkappa_1 \approx 0{,}0085} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

1.

$$\frac{\vartheta_A(x)}{\vartheta_0} = \frac{2}{3}\,\frac{u_A(x)}{u_0}\,.$$

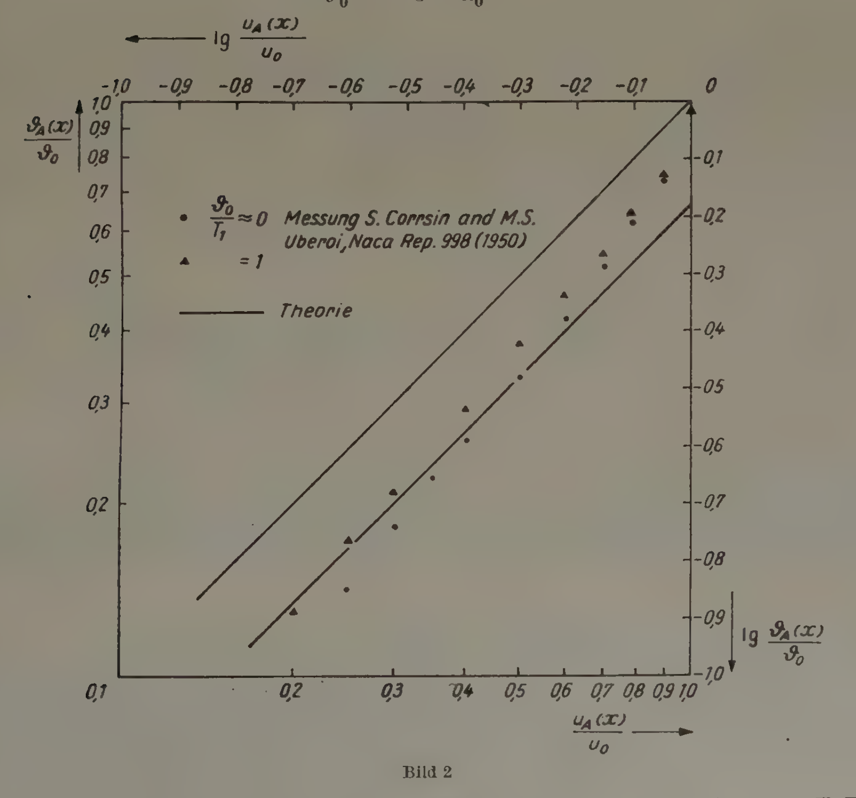


Bild 2

[14]) Für ebene Düsenstrahlen liegt für den Fall konstanter Dichte die Untersuchung von E. Förthmann [Ing.-Arch. 5 (1934), S. 42] vor, der die turbulente Ausbreitung in ruhender Luft für größere axiale Abstände gemessen hat. Der Vergleich mit der Theorie nach Abschn. III, B, 4 würde hier einen wesentlich größeren Zahlenwert für $\varkappa_1$ als bei rotationssymmetrischen Strahlen ergeben. Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter darauf ein.

[15]) W. Szablewski, a. a. O., S. 2.

[16]) S. Corrsin and M. S. Uberoi, Naca Rep. 998 (1950).

Diese aus Gl. (2.12) mit $E = 2$ (vgl. 4.) sich ergebende Relation, die in der dort geschilderten Umschränkung als hypothesenfrei anzusehen ist, wird nach Bild 2 durch das Experiment bestätigt. Im Fall $\vartheta_0/T_1 = 0{,}05$ liegen für die kleineren Werte $u_A(x)/u_0$ die zugehörigen experimentellen Werte $\vartheta_A(x)/\vartheta_0$ zu niedrig; vgl. hierzu auch Bild 5. Der Fall $\vartheta_0/T_1 = 0{,}57$ wurde nicht berücksichtigt, da die experimentelle Temperaturkurve infolge Überschneidens anderer experimenteller Temperaturkurven als unsicher anzusehen ist.

2. Temperatureinfluß auf den Verlauf der Achsenfunktionen

Nach Formel (2.6) ergibt sich die — von $\varkappa_1$ freie — Relation

$$\frac{\left.\frac{u_A(x)}{u_0}\right|_{(\vartheta_0/T_1)_I}}{\left.\frac{u_A(x)}{u_0}\right|_{(\vartheta_0/T_1)_{II}}} = \sqrt{\frac{1 + (\vartheta_0/T_1)_{II}}{1 + (\vartheta_0/T_1)_I}}$$

und die analoge Formel für $\vartheta_A(x)/\vartheta_0$.

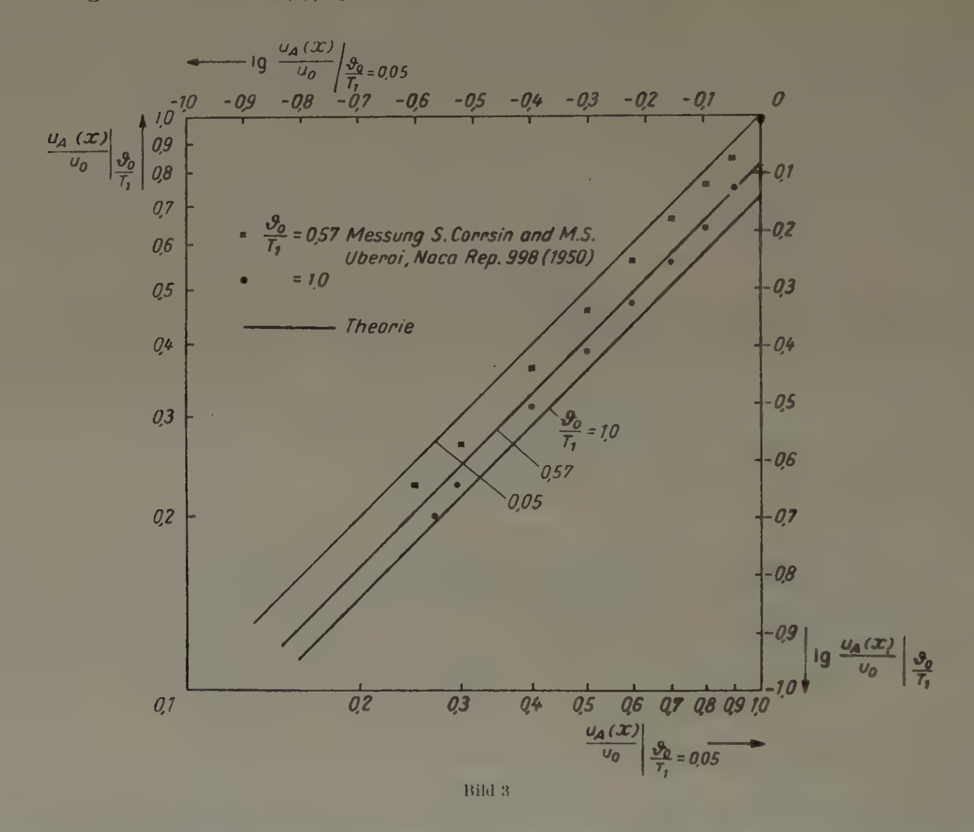


Bild 3

Aus Bild 3 kann man ablesen, inwieweit die Messungen diesen Effekt zeigen. Für $\vartheta_0/T_1 = 1{,}0$ ist die Übereinstimmung recht befriedigend, weniger für $\vartheta_0/T_1 = 0{,}57$. Auf die analoge Darstellung für die Achsenfunktionen der Temperatur wurde aus den unter 1. genannten Gründen verzichtet.

3. Verlauf der Achsenfunktionen der Geschwindigkeit und der Temperatur

Nach Gl. (2.6) erhalten wir mit (*) und dem aus Gl. (2.2) folgenden Maß $(\sigma\, B)_{0,05}^{0,95} = 1{,}7$ in der Formel $u_A(x)/u_0 = U(x/r_0)^{-1}$ für $\vartheta_0/T_1 = 0{,}05$ bzw. 0,57 bzw. 1,0 $U = 14{,}62$ bzw. $= 11{,}96$ bzw. $= 10{,}59$. Aus Bild 4 ist ersichtlich, daß die Theorie befriedigend wiedergegeben wird, wenn auch die theoretische Kurve für $\vartheta_0/T_1 = 0{,}05$ etwas zu hoch liegt.

Für $\vartheta_A(x)/\vartheta_0 = T(x/r_0)^{-1}$ erhält man nach Gl. (2.12) mit $E = 2$ für $\vartheta_0/T_1 = 0{,}05$ bzw. 1,0 die Werte $T = 9{,}74$ bzw. $= 7{,}06$. Der Fall $\vartheta_0/T_1 = 0{,}57$ wurde aus dem unter 1. erwähnten Grunde außer acht gelassen. Der in Bild 5 gezogene Vergleich zeigt eine weniger gute Übereinstimmung, insbes. für den Fall $\vartheta_0/T_1 = 0{,}05$. Allerdings ist zu beachten, daß experimentell hier nach 1. die kleinen $\vartheta_A(x)/\vartheta_0$-Werte zu niedrig liegen.

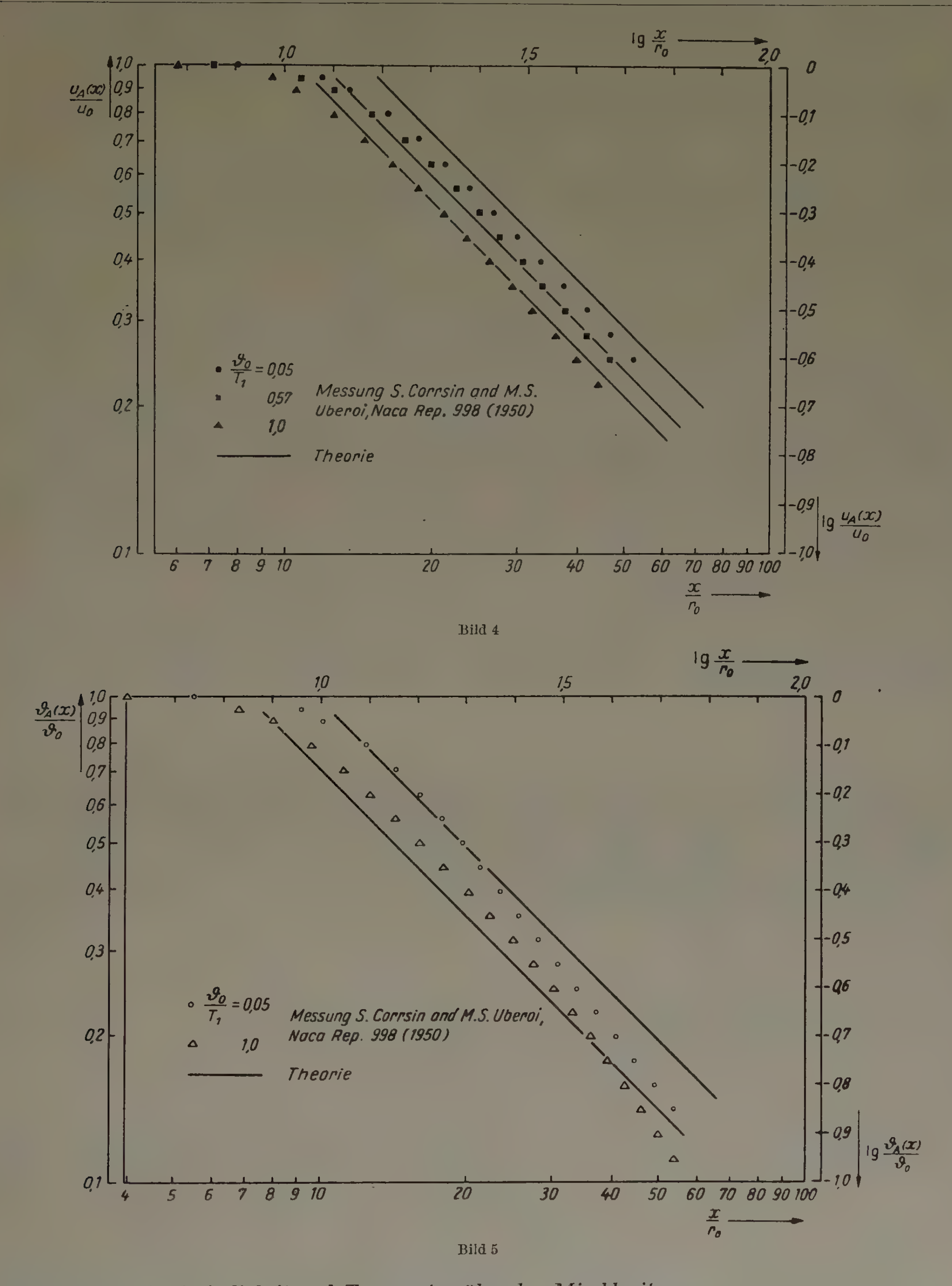


Bild 4

Bild 5

4. Profile der Geschwindigkeit und Temperatur über den Mischbreiten

Meßwerte sind hier leider nur für $\vartheta_0/T_1 \approx 0$ von S. Corrsin[17]) publiziert worden. Nach Gl. (2.2) haben wir für das Geschwindigkeitsprofil

$$\varphi = \frac{1}{[1 + (\sigma\,\eta)^2]^2}, \qquad \eta = \frac{r/r_0}{x/r_0},$$

wobei nach Gl. (2.5) mit $(\sigma\,B)_{0,05}^{0,95} = 1,7$ und mit (*) $\sigma = 8,65$ ist. Der Vergleich in Bild 6 ergibt ausreichende Übereinstimmung sowohl hinsichtlich der Profilform als auch hinsichtlich der Mischbreite.

[17]) S. Corrsin, NACA – Wartime Rep. W – 94 (1946).

Für die Temperaturverteilung (2.9)

$$\chi = \varphi^{1/E}$$

ist aus Bild 6 für die experimentellen Werte

$$\underline{E = 2}$$

ablesbar. Das ergibt $\chi = \varphi^{1/2}$. Es zeigen sich die bekannten stärkeren Abweichungen im Randgebiet, wenn auch die experimentellen Punkte hier ziemlich stark streuen.

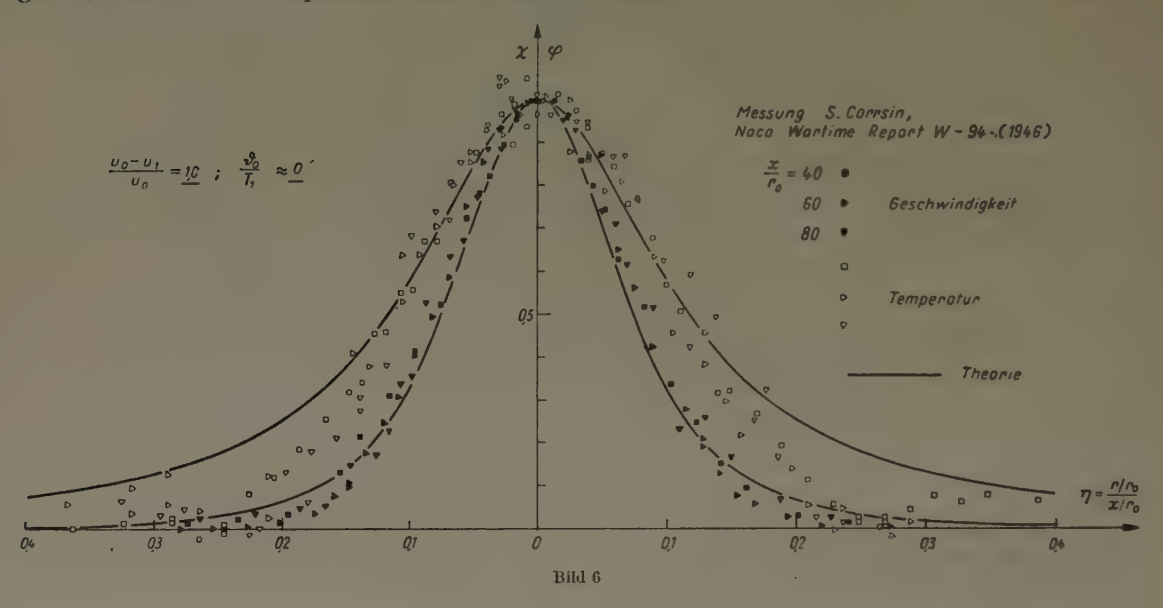


Bild 6

B. Bewegte Außenluft ($u_1 \neq 0$)

Wie wir in Abschn. III, 2 (Bemerkung) dargelegt haben, erscheint unsere Theorie der Asymptote nur bei größeren Außengeschwindigkeiten im üblichen Meßbereich (der sich bis ungefähr $(u_A(x) - u_1)/(u_0 - u_1)$ bzw. $\vartheta_A(x)/\vartheta_0 \approx 0{,}2$ erstreckt) realisierbar. Wir werden das weiter unten auch experimentell belegen.

Zum Vergleich mit der Theorie ziehen wir zunächst eine Messung von O. Pabst[18]) mit den Daten

$$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}53; \qquad \frac{\vartheta_0}{T_1} = 1{,}0\,,$$

sowie eine Messung von F. Landis und A. H. Shapiro[19]) mit

$$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}5; \qquad \frac{\vartheta_0}{T_1} = 0{,}3$$

heran.

Der Vergleich ergibt dann hier

$$\underline{\varkappa_1 \approx 0{,}0082} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

1.

$$\frac{\vartheta_A(x)}{\vartheta_0} = \frac{1}{2}\,\frac{u_A(x) - u_1}{u_0 - u_1}\,.$$

Dieses Gesetz, das sich aus Gl. (1.21) mit $E = 2$ ergibt, wird durch die genannten Experimente auch nicht annähernd wiedergegeben. Ja, das Experiment zeigt sogar Überschneidungen der Achsenfunktionen der Geschwindigkeit und Temperatur. Da andererseits sich aus dem Experiment recht deutlich $E = 2$ ergibt (vgl. 4), so muß man nach den Darlegungen im Anschluß an Gl. (1.21) annehmen, daß diese Diskrepanz zu Lasten des Experiments geht.

Wir führen im Folgenden den Vergleich nur für die Achsenfunktion der Geschwindigkeit weiter.

[18]) O. Pabst, U. u. M. 8007 (1944).
[19]) F. Landis and A. H. Shapiro, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute 1951.

2. Temperatureinfluß auf den Verlauf der Achsenfunktion der Geschwindigkeit

Nach Gl. (1.12) ergibt sich die — von $\varkappa_1$ freie — Relation

$$\frac{\left.\frac{u_A(x)-u_1}{u_0-u_1}\right|_{(\vartheta_0/T_1)_I}}{\left.\frac{u_A(x)-u_1}{u_0-u_1}\right|_{(\vartheta_0/T_1)_{II}}}=\sqrt[3]{\frac{(1+\vartheta_0/T_1)_{II}}{(1+\vartheta_0/T_1)_I}}\,.$$

In Anwendung auf die genannten Messungen folgt

$$\frac{\left.\frac{u_A(x)-u_1}{u_0-u_1}\right|_{\vartheta_0/T_1=1,0}}{\left.\frac{u_A(x)-u_1}{u_0-u_1}\right|_{\vartheta_0/T_1=0,3}}=\sqrt[3]{\frac{1,3}{2}}\,,$$

wenn wir den Einfluß der Differenz zwischen den Geschwindigkeiten $\frac{u_0-u_1}{u_0}=0,53$ und $0,50$ vernachlässigen.

In Bild 7 haben wir einige zugehörige Punkte aufgetragen; dabei wurden die den Meßpunkten von O. Pabst entsprechenden Werte der amerikanischen Messung einem Isotachendiagramm entnommen.

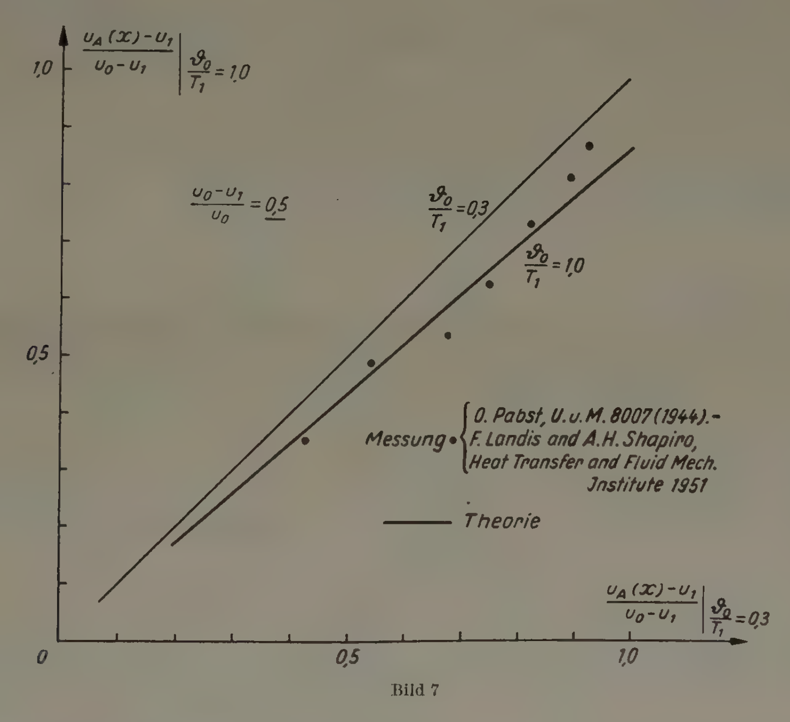


Bild 7

3. Verlauf der Achsenfunktion der Geschwindigkeit

Wir haben hier nach Abschn. III, 1 die Formel

$$\frac{(u_A(x)-u_1)}{(u_0-u_1)}=U\,(x/r_0)^{-2/3}\,.$$

U berechnet sich nach Gl. (1.12) mit (**) und mit dem aus Gl. (1.7) folgenden Maß $(\sigma B)_{0,05}^{0,95}=1,5$. Man erhält für $\frac{u_0-u_1}{u_0}=0,5$ und $\frac{\vartheta_0}{T_1}=0,3$ bzw. $\frac{u_0-u_1}{u_0}=0,53$ und $\frac{\vartheta_0}{T_1}=1,0$ $U=6,55$ bzw. $5,345$.

Bild 8 zeigt, daß die theoretischen Funktionen in der Größenordnung richtig liegen. Allerdings könnte man aus den Meßpunkten unschwer auch eine andere Neigung ablesen, als die Theorie angibt. Da jedoch die Profile — vgl. Bild 9[20]) — das Ähnlichkeitsgesetz mit dem Misch-

[20]) Auf die Wiedergabe der aus dem Isotachen- und Isothermendiagramm von F. Landis und A. H. Shapiro ablesbaren Profile haben wir verzichtet.

breitenverlauf $\frac{b_1}{r_0}$ bzw. $\frac{b_2}{r_0} \sim \left(\frac{x}{r_0}\right)^{1/3}$ annähernd befolgen, folgt aus dem Impuls- bzw. Energieintegralsatz zwangsläufig $\frac{u_A(x) - u_1}{u_0 - u_1}$ bzw. $\frac{\vartheta_A(x)}{\vartheta_0} \sim \left(\frac{x}{r_0}\right)^{-2/3}$.

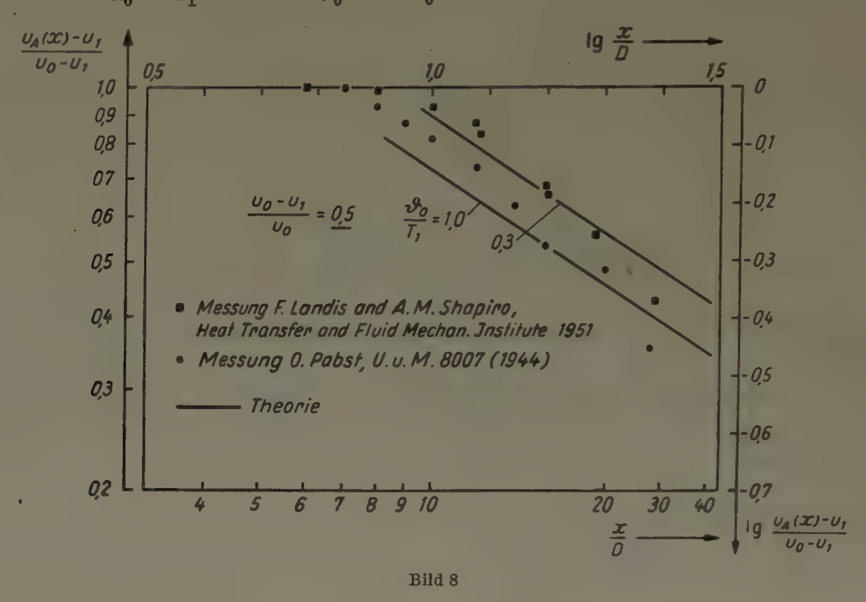


Bild 8

4. *Profile der Geschwindigkeit und Temperatur über den Mischbreiten*

Nach Gl. (1.7) haben wir das Geschwindigkeitsprofil

$$\varphi = e^{-(\sigma\,\eta)^2}, \qquad \eta = \frac{r/r_0}{(x/r_0)^{1/3}};$$

σ berechnet sich nach Gl. (1.11) mit (**) und dem Maß $(\sigma\, B)\,{}^{0,95}_{0,05} = 1{,}50$. Man erhält für

$$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}53 \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_0}{T_1} = 1{,}0 \qquad \sigma = 2{,}24\,.$$

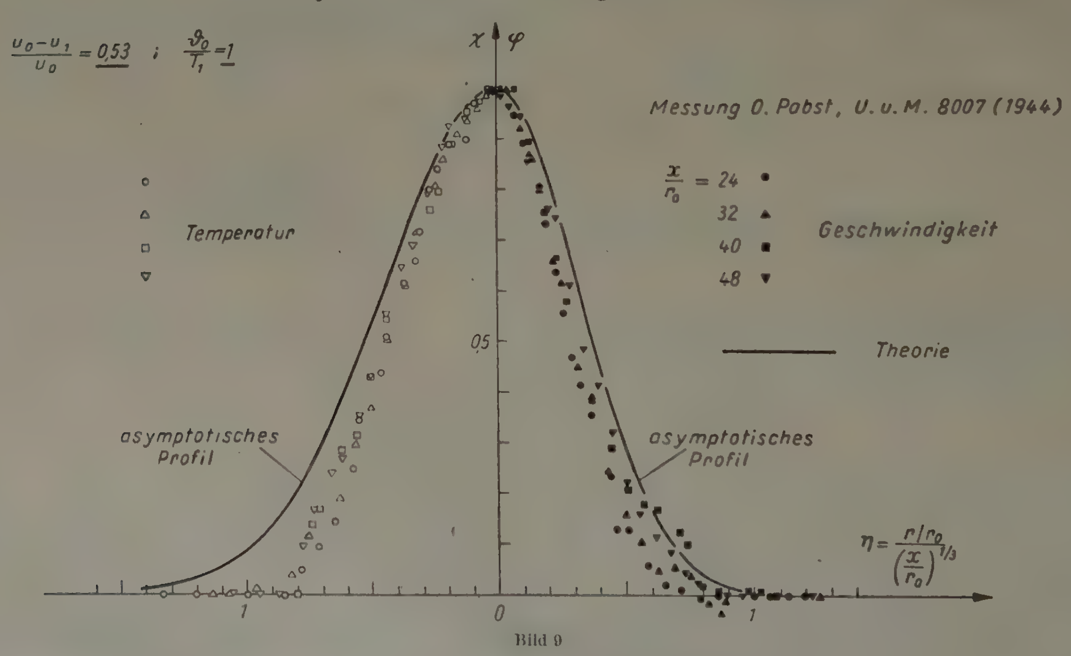


Bild 9

Mit $E = 2$ wird das Temperaturprofil nach Gl. (1.18) durch

$$\chi = \varphi^{1/2}$$

beschrieben.

Bild 9 erhält die Messung von O. Pabst. Sowohl in bezug auf die Profilform als auch die Mischbreite ist die Übereinstimmung als ausreichend anzusehen[21]). Insbesondere kann man aus der Messung von O. Pabst $E = 2$ ablesen. Daß die asymptotischen Profile als „äußere Begrenzung" der Schar der experimentellen Profile erscheinen, ist als sachgemäß anzusehen, wie wir noch auseinandersetzen werden.

Im Kernbereich einer Düsenströmung, der durch das Vorhandensein des Strahlkerns definiert ist, haben wir bekanntlich[22]) in sehr guter Näherung $\frac{b_1}{r_0}$ bzw. $\frac{b_2}{r_0} \sim \frac{x}{r_0}$; infolgedessen müssen auf dem Weg zur Asymptote die Mischbreiten den Übergang zur asymptotischen Formel $\frac{b_1}{r_0}$ bzw. $\frac{b_2}{r_0} \sim \left(\frac{x}{r_0}\right)^{1/3}$ vollziehen, worauf bereits O. Pabst[23]) hingewiesen hat. Dieser Übergang muß sich bei einer Auftragung der gemessenen Profile über der Ähnlichkeitskoordinate $\eta = \frac{(r/r_0)}{(x/r_0)^{1/3}}$ als Fächerung der Profile darstellen, wobei das asymptotische Profil als „äußere Hüllkurve" erscheint. Diese Fächerung wird, entsprechend unserer Bemerkung in Abschn. III, 2, um so markanter in Erscheinung treten, je kleiner die relative Außengeschwindigkeit u_1/u_0 ist.[24])

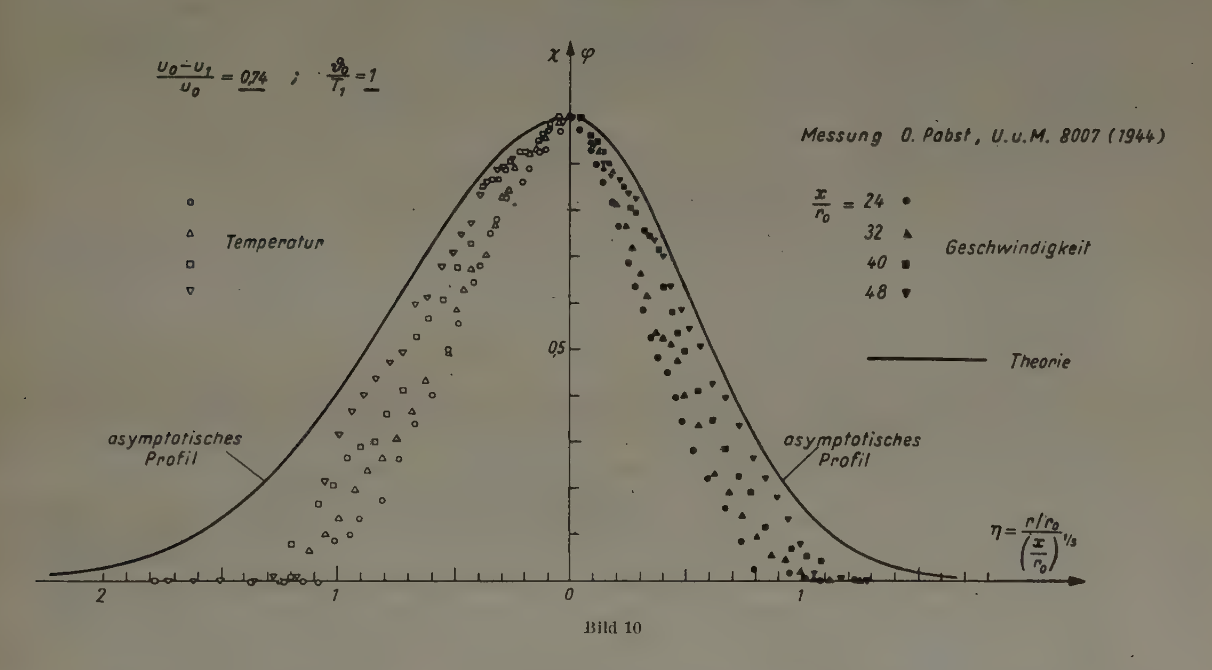


Bild 10

Bild 10, in das wir für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}74$; $\vartheta_0/T_1 = 1{,}0$ eine Messung von O. Pabst[23]) und die theoretischen Profile mit $\sigma = 1{,}35$ eingetragen haben, zeigt diese Fächerung deutlich. Auch dieser Messung kann man übrigens das Verhältnis $E = 2$ entnehmen.

---

[21]) Nach (1.11) zeigt die Theorie als Temperatureffekt eine Verkleinerung des asymptotischen Ausbreitungswinkels mit wachsendem Parameter ϑ_0/T_1 an: Für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5$; $\vartheta_0/T_1 = 0{,}3$ (F. Landis und A. H. Shapiro): $\sigma = 2{,}06$; für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}53$; $\vartheta_0/T_1 = 1{,}0$ (O. Pabst): $\sigma = 2{,}24$. Dieser Effekt findet sich experimentell anscheinend bestätigt. Dem Isotachendiagramm der zitierten Messung von F. Landis und A. H. Shapiro kann man folgende Mischbreiten, gemessen in η, bei $x/r_0 = 48$ entnehmen: $\varphi = 0{,}30$; 0,25; 0,15; 0,10 mit $\eta \approx 0{,}50$; 0,54; 0,64; 0,70. Diese Werte vergleiche man mit dem Verlauf der entsprechenden experimentellen Kurve in Abb. 9.

[22]) Vgl. z. B. W. Szablewski, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 358.

[23]) O. Pabst, a. a. O.

[24]) Für kleine relative Außengeschwindigkeiten $u_1/u_0 \neq 0$ z. B. decken sich bis zu großen x/r_0 hin die Profile bei Auftragung über der Koordinate $y = (r/r_0)/(x/r_0)$. Trägt man nun die Profile über der Koordinate $\eta = (r/r_0)/(x/r_0)^{1/3} = y(x/r_0)^{2/3}$ auf, so erhält man demgemäß eine starke Fächerung.

Manuskripteingang: 23. 4. 1958

Anschrift: Dr. W. Szablewski, Berlin-Adlershof, Büchnerweg 43

 ZAMM 39 (1959) Heft 1/2, Seite 68—76

Theorie und Experiment zum Reibungswiderstand der glatten rotierenden Scheibe bei turbulenter Strömung

Von *E. Broecker*

Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen ist theoretisch und experimentell sowohl für die Laminarströmung als auch für die laminare und turbulente Grenzschicht zwischen der Kernströmung und der rotierenden Scheibe bzw. der gegenüberliegenden Wand untersucht worden; entsprechende Ergebnisse sind für die frei rotierende Scheibe bei laminarer und turbulenter Grenzschicht bekannt.

Theorie und Experiment sind für die verschiedenen Fälle in guter Übereinstimmung mit Ausnahme des Falles der Scheibe im Gehäuse bei turbulenter Grenzschichtströmung, was bisher mit den Annahmen zur Lösung der Grenzschicht-Impulsgleichungen begründet wurde. Die folgende Untersuchung zeigt, daß das theoretische Ergebnis experimentell nicht nachweisbar ist und behandelt zwei Fälle unterschiedlicher Wandbegrenzung, die eine allmähliche bzw. schnelle Änderung des Drehmomentenbeiwertes vom unteren Grenzwert der Scheibe im engen Gehäuse zum oberen Grenzwert der freien Scheibe ergeben.

The frictional resistance of rotating discs enclosed in a casing has been investigated theoretically and experimentally both for laminar flow and for the laminar as well as for the turbulent boundary layer between core flow and rotating disc, or casing wall, respectively. Corresponding results are known for the freely rotating disc both for laminar and turbulent boundary layer.

In all these cases the theory agrees quite well with the experiments, with the exception of the case of the enclosed disc with turbulent boundary layer. The explanation for this disagreement has always been sought in the assumptions made in solving the momentum equations for the boundary layer. The present investigation shows that the theoretical result is not demonstrable by experiment; it treats two cases of different boundary conditions corresponding to slow resp. fast change of the torque coefficient with increasing casing dimensions, from the lower limit for a narrow casing to the upper limit for free rotation.

La résistance à la friction de disques en rotation en boîtes a été examinée de façon théorique et expérimentale pour le courant lamellaires ainsi que pour la couche limite lamellaire et turbulente entre le courant du noyau central et le disque en rotation, respectivement le mur opposé; des résultats correspondants sont connus pour le disque en rotation libre avec une couche limite lamellaire et turbulente.

La théorie et l'expérience se trouvent bien en accord pour les cas différents, à l'exception du cas du disque en boîte avec courant turbulent de la couche limite, ce qui a été expliqué jusqu'ici par les hypothèses employées pour la solution des équations de la force impulsive pour la couche limite. Dans l'examen suivant il est dêmontré que le résultat théorique ne peut pas être prouvé par des expériences, et deux cas de murs limites différents sont traités qui ont pour résultat un changement lent respectivement rapide du coefficient de mouvement de rotation de la valeur marginale inférieure du disque dans la boîte étroite jusqu'à la valeur marginale supérieure du disque sans boîte.

Сопротивление трения вращающихся в картерах дисков для ламинарного течения а также для ламинарного и турбулентного пограничного слоя между основным течением и вращающимся диском соответсвенно противоположной стенкой было исследовано как теоретически так и экспериментально. Аналогичные результаты известны и для свободно вращающегося диска при ламинарном и турбулентном пограничном слою.

Для различных случаев между теорией и опытом имеется хорошие согласие с исключением того случая, когда диск находится в картере при наличии турбулентного течения в пограничном слою. Это до сих пор обяснялось допущениями, принятыми при решении уравнения импульса програничного слоя. В работе показывается, что теоретический результат невозможно потвердить экспериментальным путем. Рассматриваются два случая с разными видами стенки, дающие постепенно соответсвенно скорое изменение коэффициента крутильного момента от нижнего предела, когда диск погружен в тесном картере, до верхнего предела, соответсвующего свободному диску.

1. Einleitung

Außer für den laminaren Fall der frei rotierenden Scheibe [1], [2] und der Drehströmung in der Nähe einer festen Wand [5] ist neuerdings auch die allgemeinere Strömung zwischen zwei mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit umlaufenden Scheiben als exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen ermittelt worden [9]; wird insbesondere die eine Scheibe zur festen Wand, so ergibt sich bei verschwindendem s/a oder $Re = a^2\,\omega/\nu$ (Bild 1) eine lineare Verteilung der Tangentialgeschwindigkeit zwischen Scheibe und Wand, mit zunehmendem s/a oder Re beschränkt sich die Änderung der Tangentialgeschwindigkeit grenzschichtartig auf Scheiben- und Wandnähe unter Ausbildung einer Kernströmung, deren Winkelgeschwindigkeit im Grenzfall zu $\beta \approx 0{,}3\,\omega$ ermittelt wird [13]. Die reale Strömung führt jedoch für größere s/a oder Re zu in der negativen Radialrichtung sich ausbreitenden turbulenten Grenzschichten, worauf die Übersicht zur vorliegenden Theorie im folgenden Abschnitt Bezug nimmt.

Außer der endlichen axialen Begrenzung wurde theoretisch auch der laminare Fall bei gleichzeitig radialer Begrenzung des Flüssigkeitsgebiets behandelt [13]; für den entsprechenden turbulenten Fall liegen experimentelle Ergebnisse vor [3], [4], [7], [11], [12], während die Theorie den Einfluß der zylindrischen Begrenzung vernachlässigt.

Die vorliegenden Ergebnisse können für die Berechnung der Einzelverluste von Turbomaschinen nicht ohne Einschränkung zugrunde gelegt werden. Dies gilt insbesondere für solche Ausführungen, bei denen der Drall der geförderten Flüssigkeit die Strömung an den Laufrad-

scheiben beeinflußt. Die Grundform dieser Anordnung erhält man nach Bild 1 aus der allseitig begrenzten Scheibe bei Entfernung der Zylinderwand in der nur seitlich begrenzten Scheibe mit im Außenraum ruhender Strömung, während bei der realen Laufradströmung im Außenraum eine Wirbelquellströmung vorhanden ist.

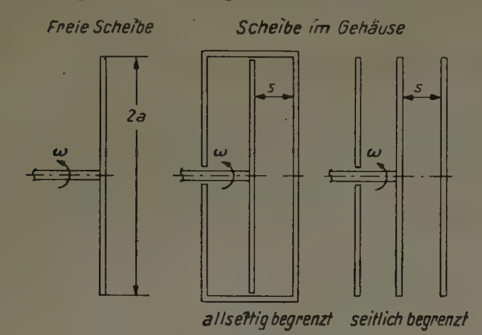


Bild 1. Scheibenanordnungen

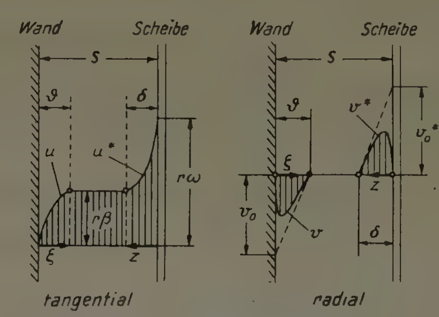


Bild 2. Geschwindigkeitsprofile, turbulente Grenzschicht

2. Theoretische Ergebnisse für die freie Scheibe [1] und für die allseitig begrenzte Scheibe [3] bei turbulenter Grenzschicht

Das v. *Kàrmàn*sche Näherungsverfahren der Impulsgleichungen für die Grenzschicht an der rotierenden Scheibe liefert in

Radialrichtung $$\frac{d}{dr}\left(r\int_0^\delta v^{*2}\,dz\right)-\int_0^\delta u^{*2}\,dz=-r\,\tau_r/\varrho-r^2\beta^2\delta \quad (1a),$$

Tangentialrichtung $$\frac{d}{dr}\left(r^2\int_0^\delta v^*u^*\,dz\right)-r^2\beta\frac{d}{dr}\left(r\int_0^\delta v^*\,dz\right)=r^2\tau_t/\varrho \quad (1b),$$

sowie für die Grenzschicht an der festen Wand in

Radialrichtung $$\frac{d}{dr}\left(r\int_0^\vartheta v^2\,d\zeta\right)-\int_0^\vartheta u^2\,d\zeta=r\,\tau_r/\varrho-r^2\beta^2\vartheta \quad (2a),$$

Tangentialrichtung $$\frac{d}{dr}\left(r^2\int_0^\vartheta v\,u\,d\zeta\right)-r^2\beta\frac{d}{dr}\left(r\int_0^\vartheta v\,d\zeta\right)=r^2\tau_t/\varrho \quad (2b).$$

Die angenommenen Grenzschichtprofile (Bild 2)

$$v^*=v_0^*\left(\frac{z}{\delta}\right)^{1/7}\left(1-\frac{z}{\delta}\right),\qquad u^*=r\beta+r(\omega-\beta)\left[1-\left(\frac{z}{\delta}\right)^{1/7}\right] \quad (3a),$$

$$v\;=v_0\left(\frac{\zeta}{\vartheta}\right)^{1/7}\left(1-\frac{\zeta}{\vartheta}\right),\qquad u\;=r\beta\left(\frac{\zeta}{\vartheta}\right)^{1/7} \quad (3b)$$

führen mit dem Wandschubspannungsgesetz

$$\frac{\tau}{\varrho\,(u^{*2}+v^{*2})}=0{,}0225\left(\frac{\nu}{\sqrt{u^{*2}+v^{*2}}\,\delta}\right)^{1/4} \quad (4a),$$

$$\frac{\tau}{\varrho\,(u^2+v^2)}=0{,}0225\left(\frac{\nu}{\sqrt{u^2+v^2}\,\vartheta}\right)^{1/4} \quad (4b)$$

zu den Impulsgleichungen in r, β, ω und δ, v_0^* bzw. ϑ, v_0.

Die Lösung für die rotierende Scheibe lautet

$$\delta=\gamma\,r^{3/5},\qquad v_0^*=\alpha\,(\omega-\beta)\,r \quad (5)$$

mit

$$\alpha^2=\frac{0{,}0278+0{,}1944\,\beta/\omega-0{,}222\,(\beta/\omega)^2}{(1-\beta/\omega)\,(1{,}058-0{,}241\,\beta/\omega)} \quad (6)$$

und

$$\gamma=\left(\frac{0{,}0225/\alpha}{0{,}313+0{,}504\,\beta/\omega}\right)^{4/5}(1+\alpha^2)^{3/10}\,(1-\beta/\omega)^{3/5}\,(\nu/\omega)^{1/5} \quad (7).$$

Damit wird, wenn

$$M = 2\pi \int_0^a \tau_t r^2 \, dr$$

das Drehmoment einer Scheibenseite und

$$c_M = \frac{M}{\varrho/2 \cdot \omega^2 a^5} = \frac{2M}{\varrho \omega^2 a^5} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

den Momentenbeiwert sowie

$$Re = \frac{a^2 \omega}{\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

die Reynolds-Zahl bedeuten, der reduzierte Momentenbeiwert (turbulente Strömung)

$$C_M = c_M Re^{1/5} = \frac{2M}{\varrho \omega^{9/5} a^{23/5} \nu^{1/5}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

für die rotierende Scheibe zu

$$C_M = 4\pi \frac{5}{23} (0{,}0225)^{4/5} [\alpha (0{,}313 + 0{,}504 \beta/\omega)]^{1/5} (1 + \alpha^2)^{3/10} (1 - \beta/\omega)^{8/5} \quad \text{(rotierende Scheibe) (11).}$$

Für $\beta = 0$ folgt daraus die Lösung für die freie Scheibe mit $\alpha = \alpha_0 = 0{,}162$ zu

$$C_{M0} = 0{,}0728 \quad \text{(frei rotierende Scheibe)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

Der entsprechende Ansatz nach (5) für ϑ und v_0 liefert wegen des positiven Vorzeichens von τ_r in (2a) eine imaginäre Konstante; Schultz-Grunow setzt deshalb $\Phi = v_0 \vartheta$ und ermittelt durch Potenzreihenentwicklung

$$C_M = 4\pi \cdot 0{,}0225 \cdot 0{,}367 \, (\beta/\omega)^{9/5} \quad \text{(feste Wand)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13).$$

Durch Gleichsetzen von (11) und (13) folgt für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten von Kernströmung und Scheibe

$$\beta/\omega = 1/1{,}954 \text{ und damit } C_M = 0{,}0311 \quad \text{(allseitig begr. Scheibe)} \quad \ldots \ldots (14),$$

wobei die Reibung an der zylindrischen Begrenzungswand vernachlässigt ist.

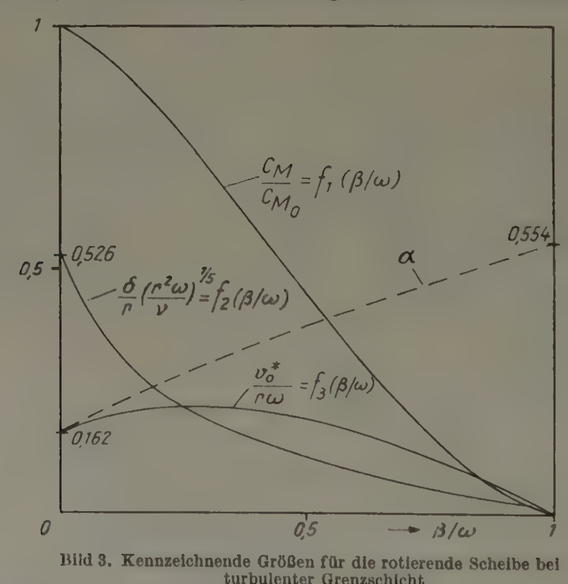


Bild 3. Kennzeichnende Größen für die rotierende Scheibe bei turbulenter Grenzschicht

3. Die kennzeichnenden Größen für die rotierende Scheibe bei turbulenter Grenzschicht in Abhängigkeit vom Winkelgeschwindigkeitsverhältnis β/ω, Bild 3

Aus (11) und (12) folgt für das Verhältnis der Momentenbeiwerte

$$c_M/c_{M0} = C_M/C_{M0} = \left[(1 + 1{,}606 \, \beta/\omega) \frac{\alpha}{\alpha_0}\right]^{1/5} \left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha_0^2}\right)^{3/10} (1 - \beta/\omega)^{8/5} = f_1(\beta/\omega) \quad . \ (15);$$

die Grenzschichtdicke läßt sich wegen (5) mit $\gamma = (\nu/\omega)^{1/5} f_2(\beta/\omega)$ in der Form

$$\frac{\delta}{r}\left(\frac{r^2 \omega}{\nu}\right)^{1/5} = \frac{\delta}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{3/5} Re^{1/5} = \left(\frac{0{,}072/\alpha}{1 + 1{,}606 \, \beta/\omega}\right)^{4/5} (1 + \alpha^2)^{3/10} (1 - \beta/\omega)^{3/5} = f_2(\beta/\omega) \quad (16)$$

schreiben, ferner wird die auf die Tangentialgeschwindigkeit bezogene radiale Wandschubspannungsgeschwindigkeit

$$\frac{v_0^*}{r\,\omega} = \alpha\,(1 - \beta/\omega) = f_3(\beta/\omega) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17).$$

4. Allgemeine theoretische und experimentelle Ergebnisse

Bild 4 zeigt außer bekannten Versuchsergebnissen einige Meßwerte [12] im turbulenten Bereich, auf welche noch näher eingegangen wird. Mit Ausnahme des berechneten Momentenbeiwertes für die Scheibe im Gehäuse bei turbulenter Grenzschichtströmung (*) sind die theoretischen Ergebnisse für die Bereiche

Laminarströmung zwischen Scheibe und Wand [3]	$c_M\,Re = \pi\,a/s$,
laminare Grenzschicht an Scheibe und Wand [3]	$c_M\,Re^{1/2} = 1{,}334$,
dgl. an der freien Scheibe [1], [2]	$= 1{,}935$,
turbulente Grenzschicht an Scheibe und Wand [3]	$c_M\,Re^{1/5} = 0{,}0311$ (*) ,
dgl. an der freien Scheibe [1]	$= 0{,}0728$

gut bestätigt. Der quantitative Unterschied zwischen Theorie und Experiment für den erwähnten turbulenten Fall wird in [3] und [8] mit den zugrunde gelegten Annahmen zur Auswertung der Grenzschicht-Impulsgleichungen erklärt. Dies befriedigt jedoch insofern nicht, als die übrigen mit vergleichbarer Näherungsrechnung erhaltenen Ergebnisse durch zuverlässige Messungen belegt sind; so liefert bei laminarer Grenzschicht die Näherung nach [3] für die freie Scheibe einen nur 2% größeren Momentenbeiwert als die exakte Lösung [2], während die Meßwerte für die Scheibe im Gehäuse zwischen der Näherung und der exakten Lösung [9], [13] liegen.

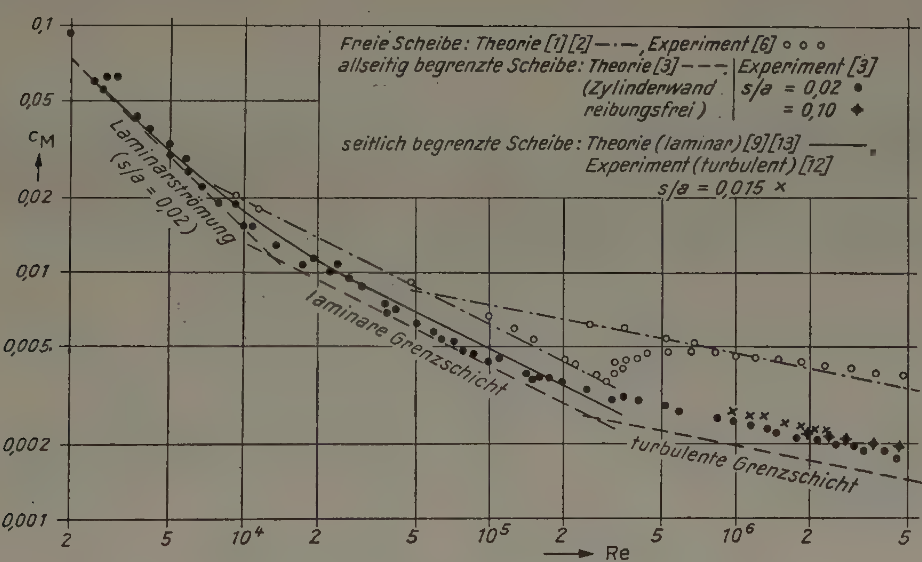


Bild 4. Drehmomentenbeiwert der rotierenden Scheibe

5. Winkelgeschwindigkeitsverhältnis β/ω und Drehmomentenbeiwert C_M für die allseitig begrenzte und für die seitlich begrenzte Scheibe in Abhängigkeit vom Abstandsverhältnis s/a

Nach (2) ist der Momentenbeiwert c_M der rotierenden Scheibe eine Funktion von Re und β/ω. Da $c_M \sim Re^{-1/5}$ nach Bild 4 genügend bestätigt ist, kann sich die Betrachtung auf den reduzierten Momentenbeiwert C_M beschränken. Den Ausgang hierzu liefern experimentelle Feststellungen der Winkelgeschwindigkeit β der Kernströmung: Für die allseitig begrenzte Scheibe liegt der Meßwert $\beta/\omega = 0{,}357$ bei $s/a = 0{,}30$ vor [3], ein weiterer Wert ergibt sich nach [7, dort. Bild 20] zu $\beta/\omega = 0{,}43$ bei $s/a = 0{,}135$, dessen Ermittlung Bild 5 zeigt, dabei ist $(r/a)^2 = \xi$ gesetzt, so daß

$$\beta/\omega = \frac{1}{a\,\omega}\,(2\,\Delta p_0/\varrho)^{1/2}$$

leicht aus der Figur folgt. Entsprechende Druckmessungen an einer die rotierende Scheibe seitlich begrenzenden festen Scheibe [12] sind in Bild 6 dargestellt; dabei waren die Druckmeßstellen linear in ξ angeordnet, um bereits im Experiment die Abweichungen gegenüber $d\beta/dr = 0$

zu veranschaulichen. Wie später begründet wird, wurde der Druckverlauf durch ΔP_0 reduziert wobei mit (18)

$$\Delta P_0 = \varrho(a\,\omega/2)^2/2$$

definiert ist, somit kann unmittelbar an der Abszisse abgelesen werden

$$\beta/\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta p_0}{\Delta P_0}\right)^{1/2}.$$

Für größeren Scheibenabstand s beginnt nach Bild 6 von der Drehachse aus eine Abweichung von der starren Rotation der Kernströmung im Sinne der Potentialwirbelströmung.

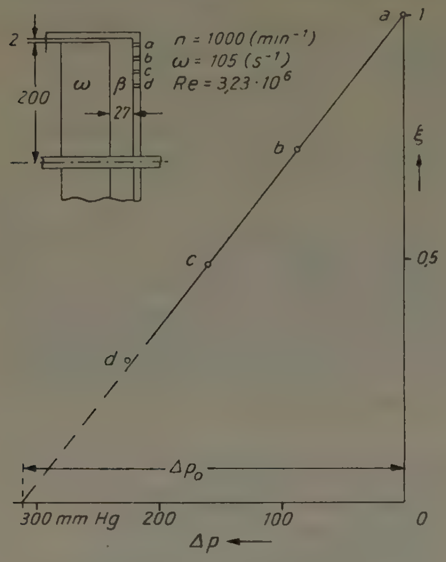


Bild 5. Ermittlung von β/ω bei allseitig begrenzter Scheibe nach Messung [7] mit Wasser

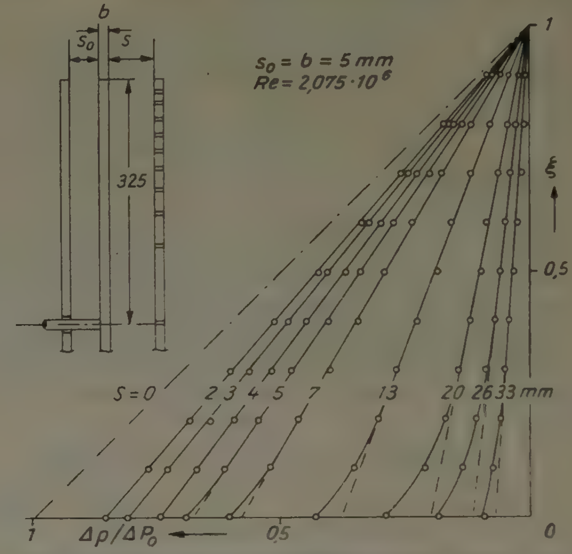


Bild 6. Ermittlung von β/ω bei seitlich begrenzter Scheibe nach Messungen [12] in Luft

Zur Umrechnung der gemessenen Momentenbeiwerte der Versuchsanordnung nach Bild 6 (s_0 = konstanter, s = variabler Scheibenabstand) auf eine symmetrische Anordnung gleicher Scheibenabstände s mit beliebig dünner rotierender Scheibe wurden gesetzt:

M_{ges} = Gesamtmoment der Scheibe nach Bild 6,
M' = Moment der rechten Scheibenseite,
M'' = Moment der linken Scheibenseite,
M_a = Moment am Scheibenumfang der Breite b,

so daß

$M_{ges} = M' + M'' + M_a$ und für die symmetrische Anordnung $M = M'$ folgt.

Es können

$$M' = 2\pi\int_0^a \tau_t' \, r^2\,dr\,, \qquad M'' = 2\pi\int_0^a \tau_t'' \, r^2\,dr$$

wegen

$$\tau_t' = \tau_{ta}'(r/a)^{8/5}\,, \qquad \tau_t'' = \tau_{ta}''(r/a)^{8/5}$$

in der reduzierten Form

$$\frac{M'}{\tau_{ta}'} = \frac{M''}{\tau_{ta}''} = 2\pi\,\frac{5}{23}\,a^3$$

geschrieben werden; zur vereinfachten Berücksichtigung von

$$M_a = 2\pi\,a^2\,b\,\tau_{ta}$$

sei

$$\tau_{ta} = \frac{1}{2}\,(\tau_{ta}' + \tau_{ta}'')$$

genommen, so daß

$$M' = \frac{M_{ges}}{1 + \frac{23}{5}\cdot\frac{b}{2a}} - M''.$$

wird, wobei für $s = s_0$ $M' = M''$ gilt. Mit (8) wird dann

$$c_M = \frac{2\,M'}{\varrho\,\omega^2\,a^5}.$$

Die Meßwerte β/ω und $C_M = c_M\,Re^{1/5}$ sind in Bild 7 und 8 sowohl für die seitlich begrenzte Scheibe als auch für die allseitig begrenzte Scheibe eingetragen, wobei die Werte c_M nach [7] der dortigen empirischen Gl. (9) in $c_M = \frac{2\pi}{5}\,k_s$, $Re = \frac{\pi}{30}\,Re_{[7]}$ umgerechnet wurden.

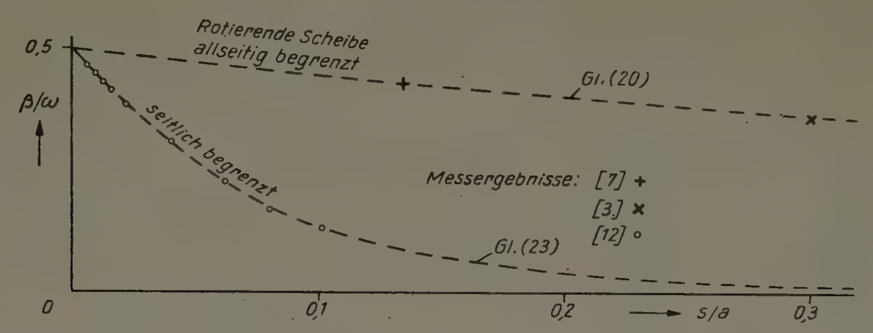


Bild 7. Winkelgeschwindigkeitsverhältnis β/ω bei allseitig begrenzter bzw. seitlich begrenzter rotierender Scheibe in Abhängigkeit von s/a

Man erkennt für den ersteren Fall ein ausgeprägtes Minimum von C_M und eine schnellere Zunahme an den Wert der freien Scheibe als für den letzteren Fall, wie auch aus dem unterschiedlichen Verlauf von β/ω hervorgeht. Insbesondere liefert das Experiment

$$\lim_{s/a \to 0} \frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{2} \quad \text{(18)}$$

gegenüber dem theoretischen Ergebnis 1/1,954 nach [3]. Die Gültigkeit des theoretischen Wertes wird trotzdem nicht widerlegt, weil die Theorie von s/a unabhängige Grenzschichten annimmt und wegen der verschiedenen Vorzeichen von τ_r in den Impulsgleichungen (1a) und (2a) den

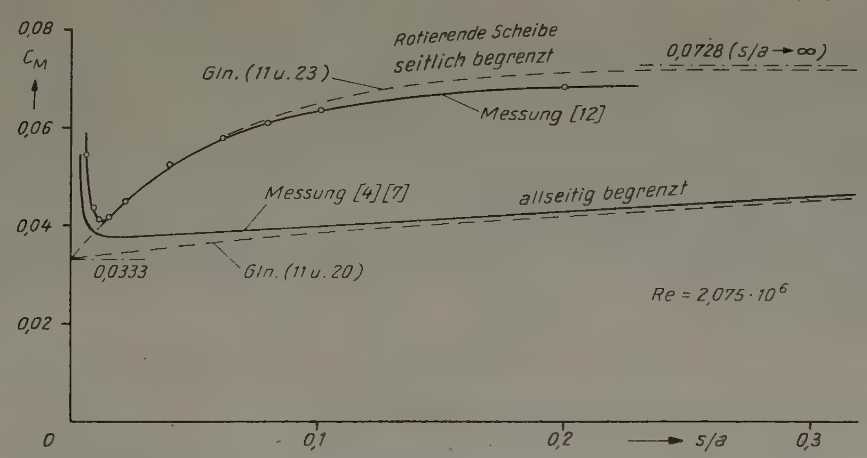


Bild 8. Reduzierter Momentenbeiwert der allseitig begrenzten bzw. seitlich begrenzten rotierenden Scheibe in Abhängigkeit von s/a

Wert $\beta/\omega = 1/2$ ausschließen muß, während beim Experiment bei abnehmendem s/a die Kernströmung allmählich verschwindet und die Strömung dem laminaren Grenzfall $\beta/\omega = 1 - z/s$ oder

$$\bar{\beta}/\omega = \frac{1}{s\,\omega} \int_0^a \beta\,dz = 1/2$$

entsprechend $(s/a)^2\,Re \to 0$ [13, Bild 5] zustrebt. Das theoretische Ergebnis nach [3] ist damit experimentell nicht nachweisbar, zumal auch für solche s/a, bei denen entsprechend dem späteren Bild 10 nachweislich die Grenzschicht an der ganzen Scheibe turbulent ist, die Reibung am Umfang der Kernströmung von nicht mehr vernachlässigbarem Einfluß ist. (Die Eliminierung dieses Einflusses durch eine mit der Winkelgeschwindigkeit β rotierende Zylinderwand würde

nicht den betrachteten Fall der im festen Gehäuse rotierenden Scheibe realisieren). Im folgenden seien noch die Verläufe von β/ω und C_M für die in Bild 7 und 8 gegenübergestellten Fälle theoretisch untersucht:

Bei der allseitig begrenzten Scheibe wird außer an der rotierenden und der festen Scheibe auch eine Grenzschicht $\varepsilon \ll a$ zwischen Kernströmung und Zylinderwand mit der Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u_x}{a\,\beta} = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{1/7}$$

angenommen (Bild 9), welche unter Vernachlässigung der axialen Bewegung

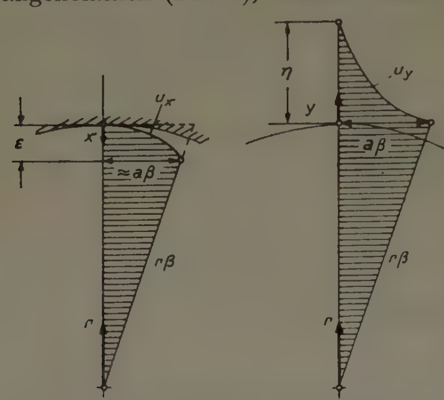


Bild 9. Geschwindigkeitsprofile am Umfang der Kernströmung bei allseitig begrenzter bzw. seitlich begrenzter rotierender Scheibe

$$\frac{\tau_t}{\varrho(a\,\beta)^2} = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{a\,\beta\,\varepsilon}\right)^{1/4}$$

ergibt. Da sich die Betrachtung auf kleinere s/a beschränken soll, wird in erster Näherung die Grenzschichtdicke ε mit der Grenzschichtdicke δ_a am Umfang der rotierenden Scheibe in Beziehung gesetzt, welche nach (16) zu

$$\frac{\delta_a}{a}\,Re^{1/5} = f_2(\beta/\omega)$$

ermittelt wurde, wobei für die Größe von ε die Winkelgeschwindigkeit β statt der Differenz $(\omega - \beta)$ bestimmend ist, so daß

$$\frac{\varepsilon}{a}\,Re^{1/5} = f_2\,(1 - \beta/\omega) = \bar{f}_2(\beta/\omega)$$

gesetzt wird; $\bar{f}_2$ ist danach die an der durch $\beta/\omega = 1/2$ gehenden Senkrechten gespiegelte Funktion f_2 in Bild 3. Mit $M_z = 2\,\pi\,a^2\,s\,\tau_t$ als Reibungsmoment der Kernströmung an der zylindrischen Begrenzung wird

$$C_{M_z} = 4\,\pi \cdot 0{,}0225\,(\beta/\omega)^{7/4}\,(\bar{f}_2)^{-1/4} \cdot s/a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Unterscheiden weiter C_{M_r} bzw. C_{M_f} die reduzierten Momentenbeiwerte der rotierenden bzw. festen Scheibe, so ergibt sich aus $C_{M_z} = C_{M_r} - C_{M_f}$

$$s/a = 3{,}54\,(\omega/\beta)^{7/4}\,(\bar{f}_2)^{1/4}\,(C_{M_r} - C_{M_f}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20),$$

worin nach (11) bzw. (12) u. (15) $C_{M_r} = 0{,}0728 \cdot f_1(\beta/\omega)$ und ferner $C_{M_f} = 0{,}116 \cdot (\beta/\omega)^{9/5}$ sind; die Konstante vor dem letzteren Ausdruck ist dabei unter Berücksichtigung von (18) eingesetzt, während (13) den kleineren Wert 0,1038 ergibt.

Bei der nur seitlich begrenzten Scheibe wird nach Bild 9 von einer radialen Vermischungsbreite η zwischen Kernströmung und Außenraum ausgegangen, in welcher die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u_y}{a\,\beta} = 1 - \left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/7}$$

herrsche und für welche das Schubspannungsgesetz $(y = 0)$

$$\frac{\tau_t}{\varrho(a\,\beta)^2} = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{a\,\beta\,\eta}\right)^{1/4}$$

gelte. Wegen der endlichen axialen Breite der freien Mischströmung zwischen Kern und Außenraum wird in den Ansatz für η noch das Abstandsverhältnis s/a mit einbezogen entsprechend

$$\eta/a = \left(\frac{\nu}{a^2\,\beta}\right)^{1/5} \cdot F(s/a)\,;$$

eine befriedigende Übereinstimmung mit den Meßwerten wurde erhalten mit $F^{-1/4} = 15 \cdot e^{16{,}85\,s/a}$, wonach der reduzierte Momentenbeiwert der Vermischung der Kernströmung mit dem Außenraum zu

$$C_{M_v} = 4\,\pi \cdot 0{,}0225\,(\beta/\omega)^{9/5} \cdot 15 \cdot e^{16{,}85\,s/a} \cdot s/a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21a)$$

und danach

$$s/a \cdot e^{16{,}85\,s/a} = 0{,}236\,(\omega/\beta)^{9/5}\,(C_{M_r} - C_{M_f}) = 0{,}236\,[C_{M_r}(\omega/\beta)^{9/5} - 0{,}116] \quad \ldots \quad (21b)$$

werden. In einem zweiten Rechnungsgang mit dem Ansatz

$$\eta/a = \left(\frac{\nu}{a^2\,\beta}\right)^{1/5} \cdot F^*(\beta/\omega)$$

konnten die Meßwerte ebenfalls, da β/ω bei gegbener Anordnung nur eine Funktion von s/a ist, dargestellt werden, wenn $F^{*\,1/4} = 0{,}164 \cdot (\beta/\omega)^{13/10}$ gesetzt wurde, was anderseits

$$C_{Mv} = \frac{4\,\pi \cdot 0{,}0225}{0{,}164}\,(\beta/\omega)^{1/2} \cdot s/a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22\text{a})$$

sowie

$$s/a = 0{,}58\,(\omega/\beta)^{1/2}\,(C_{Mr} - C_{Mf}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22\text{b})$$

liefert. Aus (21a) und (22a) folgt auch

$$\beta/\omega = \frac{1}{2}\,e^{-12{,}96\,s/a} \approx \frac{1}{2}\,e^{-13\,s/a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Nach Bild 7 erfolgt die Abnahme von β/ω mit zunehmendem s/a für die nur seitlich begrenzte Scheibe erheblich schneller als bei der allseitig begrenzten Scheibe, der Vergleich von (19) mit (21a) bzw. (22a) ergibt $s/a \to 0 \quad C_{Mv} \approx 8{,}4\,C_{Mz}$.

Die berechnete Winkelgeschwindigkeit der Kernströmung für die allseitig begrenzte Scheibe (20) wird durch die Messungen nach [3] und [7] sehr gut bestätigt; die Messungen von [12] für die seitlich begrenzte Scheibe folgen befriedigend einer der angeführten Gln. (21b), (22b) und (23), so daß die Extrapolation auf größere s/a berechtigt erscheint.

Der berechnete Verlauf der reduzierten Momentenbeiwerte für die betrachteten Fälle unterscheidet sich nach Bild 8 derart, daß für die nur seitlich begrenzte Scheibe bereits bei kleinem s/a eine Übereinstimmung mit der Messung erreicht wird, während für die allseitig begrenzte Scheibe erst für größere s/a Messung und Rechnung zusammentreffen. Der Grund hierfür kann darin gesehen werden, daß im ersteren Fall der in der Grenzschicht geförderte Volumstrom am Umfang der rotierenden Scheibe

$$V_a = 2\,\pi\,a \int_0^{\delta_a} v_a^*\,dz = 2\,\pi\,a \cdot 0{,}409 \cdot v_{0a}^*\,\delta_a = 2\,\pi \cdot 0{,}409 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot a^3\,\omega \cdot Re^{-1/5}$$

in den Außenraum austritt und ein gleichgroßer Volumstrom am Umfang der festen Scheibe eintritt, wogegen beim letzteren Fall ein Volumumlauf im Bereich der Grenzschichten vorhanden ist und insbesondere bei kleinem s/a die Eckenströmungen nicht mehr gegen die Grenzschichtströmungen an der rotierenden und festen Scheibe sowie am Zylindermantel vernachlässigbar sind. Für die nur seitlich begrenzte Scheibe läßt sich denn auch der Übergang von der turbulenten Grenzschichtströmung in die Laminarströmung an der Abweichung der Messung von der Rechnung besser erkennen: Bezeichnet $(s/a)_k$ das kritische Abstandsverhältnis, für welches die turbulenten Grenzschichten an der rotierenden und festen Scheibe am Scheibenumfang zusammentreffen, so liefert die Abschätzung

$$(s/a)_k \approx 2\,\delta_a/a = 2\,f_2(\beta/\omega)\,Re^{-1/5}$$

für die Messung nach Bild 8 mit der dort angegebenen *Reynold*szahl

$$(s/a)_k \approx \frac{2}{18{,}35}\,f_2(\beta/\omega)\,;$$

aus Bild 10, das den Bereich kleiner s/a von Bild 8 näher darstellt, erkennt man die beginnende Abweichung zwischen Messung und Rechnung für $s/a \approx 0{,}015$, wofür nach Bild 7 $\beta/\omega = 0{,}42$ und nach Bild 3 $f_2(\beta/\omega) = 0{,}14$ ermittelt werden, was $(s/a)_k \approx 0{,}0153$ übereinstimmend ergibt.

Für kleinere s/a nimmt C_M erheblich zu und erst für sehr kleine s/a bei über die ganze Scheibe sich erstreckender Laminarströmung nähert sich C_M dem theoretischen Verlauf. Letzterer ist sowohl nach der approximativen Lösung nach [3] als auch nach der exakten Lösung nach [9] und [13] eingetragen; für sehr kleine s/a verschwindet der dargestellte Unterschied der Lösungen, wobei der in [13] angegebene Beiwert (10.2)

$$\log \Delta \to -\log\left(\frac{\Omega\,H^2}{\nu}\right)$$

geht und mit $c_M\,Re = \pi\,a/s$ als 0. Näherung von [3] identisch wird, für größere s/a geht nach [13, Bild 11] $c_M\,Re^{1/2} \to \approx \pi/2$ (vgl. Bild 4) bzw. $C_M \to \approx 0{,}02$ in Bild 10. Schließlich finden

die geringen Abweichungen der gemessenen von den berechneten C_M für die nur seitlich begrenzte Scheibe bei größeren s/a in Bild 8 darin ihre Erklärung, daß der in Bild 7 dargestellte Verlauf von β/ω, welcher der Rechnung in Bild 8 zugrunde liegt, aus dem (gestrichelt verlängerten) linearen Druckverlauf nach Bild 6 bestimmt ist, wobei die Änderung des Strömungszustandes in der Nähe der Drehachse bei größeren s/a nicht berücksichtigt wird; bei Beachtung dieser Abweichung ergäben sich hierfür im Mittel größere β/ω und entsprechend kleinere C_M im Sinne des experimentell festgestellten Verlaufs.

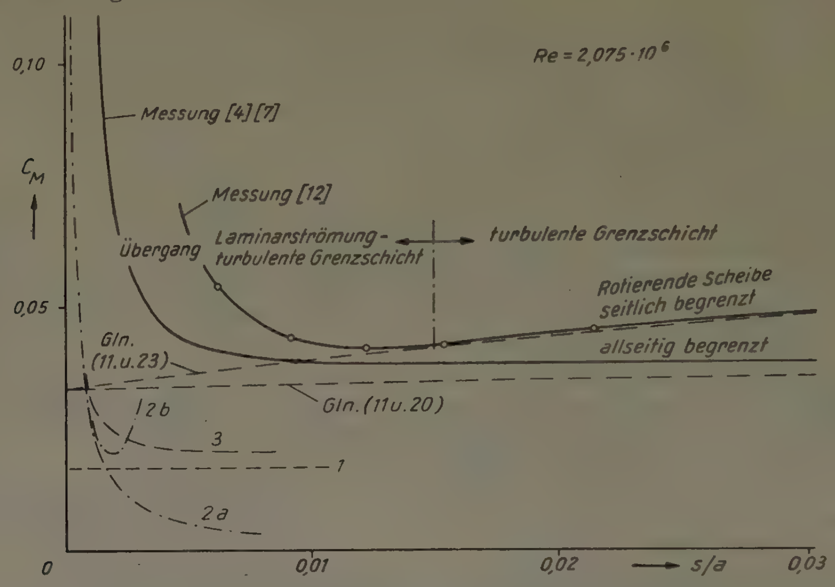


Bild 10. Reduzierte Momentenbeiwerte im Übergangsbereich laminar-turbulent
1: Laminare Grenzschicht [3]
2a bzw. 2b: Laminarströmung [3] (0. bzw. 2. Näherung)
3: Laminarströmung [9] [13] mit Übergang in lam. Grenzschicht

Literatur

[1] Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. **1** (1921), S. 233.
[2] W. G. Cochran, The flow due to a rotation disc. Proc. Cambridge Phil. Soc. **30** (1934), S. 365.
[3] F. Schultz-Grunow, Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen. Z. angew. Math. Mech. **15** (1935), S. 191.
[4] H. Föttinger, Über die Flüssigkeitsreibung umlaufender Scheiben, Zylinder und Zellenkörper. Z. angew. Math. Mech. **17** (1937), S. 356.
[5] U. T. Bödewadt, Die Drehströmung über festem Grunde. Z. angew. Math. Mech. **20** (1940), S. 241.
[6] Th. Theodorson, A. Regier, Experiments on drag of revolving discs, cylinders, and streamline rods at high speeds. NACA Report 793 (1944).
[7] K. Pantell, Versuche über Scheibenreibung. Forschg. Ing.-Wes. **16** (1949/50), S. 97.
[8] H. Schlichting, Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe 1951: G. Braun Verlag.
[9] G. K. Batchelor, Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. Quart. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. IV, Pt. 1 (1951), p. 29.
[10] H. Schlichting, E. Truckenbrodt, Die Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe. Z. angew. Math. Mech. **32** (1952), S. 97 und **34** (1954).
[11] F. Burhorn, H. Griem, W. Lochte-Holtgreven, Auftreten von Magnetfeldern in zirkulierendem flüssigen Quecksilber. Z. f. Phys. **137** (1954), S. 175.
[12] E. Broecker, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den Reibungswiderstand rotierender Scheiben. Interner Bericht des Hermann-Föttinger-Instituts Berlin (1955).
[13] D. Grohne, Zur laminaren Strömung in einer kreiszylindrischen Dose mit rotierendem Deckel. Nachr. d. Akad. d. Wiss. Göttingen (1955), S. 263 und Z. angew. Math. Mech., Sonderheft (1956), S. 17.

Manuskripteingang: 9. 5. 1958

Anschrift: Dr.-Ing. Ernst Broecker, Flen (Schweden), Stenhammargatan 11

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Berechnung des spannungsvermindernden Einflusses einer Nabe bei der rotierenden konischen Scheibe

Mittels der von Honegger, Zürich[1]), angegebenen Festigkeitsberechnung rotierender konischer Scheiben läßt sich ein spannungsvermindernder Einfluß einer Nabe zunächst nur so ermitteln, daß man diese Rechnung für mehrere angenommene Außenzugspannungen σ_i durchführt und die Spannung am Innenrand in Abhängigkeit hiervon aufträgt. Ebenso müßte dann der andere Ausdruck für diese Spannung (s. Hütte Bd. 1, S. 734)

$$\sigma_{ti} = \frac{\gamma\, \omega^2\, r_0^2}{g} + \sigma_i \left(\mu + \frac{s\, r_0}{B\, H}\right)$$

in Abhängigkeit von σ_i aufgetragen werden. Der Schnittpunkt ergäbe dann die gesuchte Spannung σ_{ti}.

[1]) Z. angew. Math. Mech. 7 (1927), S. 120—128 u. Biezeno-Grammel, Technische Dynamik.

Um diese nicht unerhebliche Rechenarbeit abzukürzen wird ein übersichtliches rasch konvergierendes Näherungsverfahren vorgeschlagen, welches von dem für die ebene Scheibe mit Kranz und Nabe (s. Hütte) gültigen Gleichungssystem ausgeht.

Für die dort auftretende Außenzugspannung σ_i läßt sich der Ausdruck errechnen

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{ti}\,(\sigma_a = \sigma_i = 0) + \sigma_a \dfrac{2\,R_0^2}{R_0^2 - r_0^2} - \dfrac{\gamma\,\omega^2\,r_0^2}{g}}{\mu + \dfrac{s\,r_0}{B\,H} + \dfrac{R_0^2 + r_0^2}{R_0^2 - r_0^2}}.$$

Hierin bedeuten die ersten beiden Glieder im Zähler die Spannung am Innenrand bei Vorhandensein einer Zugbelastung σ_a am Außenrand und der dritte Ausdruck im Nenner den Einfluß, mit dem die auftretende Außenzugspannung σ_i wegen Vorhandenseins der Nabe die Spannung am Innenrand herabdrückt.

Man berechnet daher zunächst für die gegebene Zugbelastung σ_a am Außenrand die Spannung am Innenrand der konischen Scheibe $\bar{\sigma}_{ti}(\sigma_a)$ und damit einen besseren Wert von σ_i aus:

$$\sigma_{i_1} = \frac{\bar{\sigma}_{ti}(\sigma_a) - \dfrac{\gamma\,\omega^2\,r_0^2}{g}}{\mu + \dfrac{s\,r_0}{B\,H} + \dfrac{R_0^2 + r_0^2}{R_0^2 - r_0^2}}.$$

Mit diesem Wert σ_{i_1} rechnet man einen ersten Näherungswert $\sigma_{ti}^I\,(\sigma_a, \sigma_i)$ für die konische Scheibe aus, der sich analog der ebenen Scheibe auch schreiben läßt,

$$\sigma_{ti}\,(\sigma_a, \sigma_1) = \bar{\sigma}_{ti}(\sigma_a) - \varepsilon\,\sigma_{i_1},$$

wobei ε der unbekannte konische Einfluß ist, der dem Quotient $\dfrac{R_0^2 + r_0^2}{R_0^2 - r_0^2}$ bei der ebenen Scheibe entspricht. Aus dieser Beziehung folgt ε und mit diesem Wert wiederum ein besserer Wert von σ_i

$$\sigma_{i_2} = \frac{\bar{\sigma}_{ti}(\sigma_a) - \dfrac{\gamma\,\omega^2\,r_0^2}{g}}{\mu + \dfrac{s\,r_0}{B\,H} + \varepsilon}.$$

Hiermit findet sich ein besserer Wert für die Spannung $\bar{\sigma}_{ti}^{II}(\sigma_a, \sigma_i)$ am Innenrand Dies ließe sich mit der Beziehung

$$\bar{\sigma}_{ti}^{II}(\sigma_a, \sigma_i) = \bar{\sigma}_{ti}(\sigma_a) - \varepsilon\,\sigma_{i_2}$$

solange fortsetzen, bis σ_i und $\bar{\sigma}_{ti}(\sigma_a, \sigma_i)$ sich nicht weiter ändern, jedoch ist dies meistens nicht notwendig, weil das Verfahren sehr schnell konvergiert und schon der zweite Wert $\bar{\sigma}_{ti}^{II}\,(\sigma_a, \sigma_i)$ bzw. σ_{i_2} sich von dem ersten nicht sehr unterscheidet.

Verfasser: Dr.-Ing. J. Meyer, Kassel, Kölnische Str. 95 1/2

On the Extension of W. Nusselt's Heat Transfer Theory for the Film Condensation of Steam

W. Nusselt investigated the heat transfer for the film condensation of steam by using the approximate theory [1], but this theory is not applicable for the case of steam condensation on the flat horizontal plate having definite extension.

Here the author wish to describe the extension of W. Nusselt's theory under the consideration of the existence of the static pressure distributions in the water film of condensed steam.

The Navier-Stokes equation of motion can be written as follows under the assumption of $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, which shows that "there are no accelerations in the water flow in the film",

$$\gamma \cdot \sin\Theta - \frac{dp}{dx} + \mu\,\frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (1),$$

where

- γ spezific weight of water in the film
- p static pressure in the water film
- u velocity of water in the film
- Θ inclination angle of the surface of the cooling plate to the horizontal plane (small angle)
- μ coefficient of viscocity of water in the film.

Using the water depth Y and Y_0 in the water film as shown in Fig. 1, the static pressure p can be written as follows

$$p \approx p_s + \gamma\,(Y_0 - Y), \qquad \frac{dp}{dx} \approx \gamma\,\frac{dY_0}{dx}, \qquad \Theta \approx 0$$

where p_s shows the pressure of saturated steam.

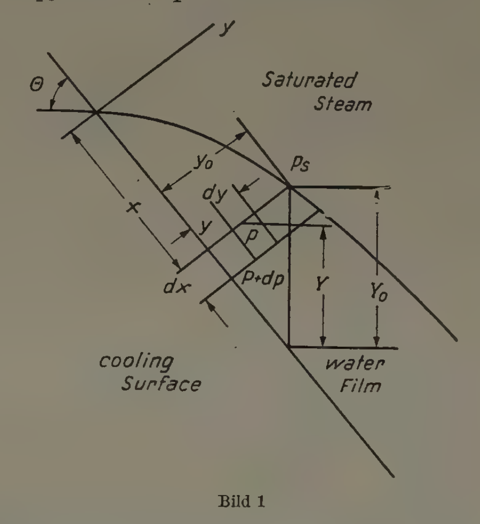


Bild 1

Using above relation, the equation (1) can be written as follows

$$\gamma\left[\sin\Theta - \frac{dY_0}{dx} + \mu\,\frac{d^2u}{dy^2}\right] = 0 \quad . \; . \; . \; (2).$$

By integrating above equation (2) for y, the velocity u can be written as follows under the boundary condition of (1) $u = 0$ at $y = 0$ and (2) $\dfrac{du}{dy} = 0$ at $y = y_0$,

$$u = \frac{\gamma}{\mu}\left[\frac{dY_0}{dx} - \sin\Theta\right] \cdot \left[y \cdot y_0 - \frac{y^2}{2}\right] \quad . \; . \; (3).$$

The mean velocity can be calculated as follows

$$u_m = \frac{1}{y_0}\int_0^{y_0} u\,dy = \frac{\gamma}{\mu}\left[\frac{dY_0}{dx} - \sin\Theta\right]\frac{y_0^2}{3}.$$

The quantity of water flow for unit width of the water film is

$$G_1 = u_m\,y_0\,\gamma = \frac{\gamma^2}{\mu}\left[\frac{dY_0}{dx} - \sin\Theta\right]\frac{y_0^3}{3}$$

and further we can write as follows

$$dG_1 = \frac{\gamma^2}{3\,\mu} \cdot \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dY_0}{dx} - \sin\Theta\right) y_0^3\right] dx\,.$$

On the other hand, the condensed quantity is

$$dG_2 = \frac{\lambda}{y_0} \cdot \frac{\Theta_s - \Theta_w}{r}\,dx$$

for unit width of the water film, where

- λ coefficient of thermal conductivity
- r latent heat of vaporization of water

Θ_s temperature of saturated steam
Θ_w temperature of the surface of cooling plate

The relation of $dG_1 = dG_2$ can be written as follows

$$\frac{\gamma^2}{3\mu}\cdot\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dY_0}{dx}-\sin\Theta\right)y_0^3\right]=\frac{\lambda}{y_0}\cdot\frac{\Theta_s-\Theta_w}{r} \quad (4).$$

In the Fig. 1, we can write as follows

$$Y_0=\frac{y_0}{\cos\Theta}, \qquad \frac{dY_0}{dx}=\frac{1}{\cos\Theta}\cdot\frac{dy_0}{dx}.$$

Using above relation, the equation of (4) can be written as follows

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_0^3}{\cos\Theta}\cdot\frac{dy_0}{dx}-\sin\Theta\cdot y_0^3\right]=\frac{3\mu\lambda}{\gamma^2 r}(\Theta_s-\Theta_w)\frac{1}{y_0}.$$

This differential equation can be written as follows by using the constant values of A, B and C

$$A\frac{d}{dx}\left(\frac{dy_0^4}{dx}\right)+\frac{4}{3}B\frac{dy_0^3}{dx}+\frac{C}{y_0}=0,$$

where

$$A=\frac{1}{4\cdot\cos\Theta}, \qquad B=-\frac{3}{4}\sin\Theta,$$

$$C=\frac{3\mu\lambda(\Theta_w-\Theta_s)}{\gamma^2 r}.$$

This differential equation can be written as follows by putting $y_0^4=h$ and $\frac{dh}{dx}=q$, $\frac{d^2h}{dx^2}=q\frac{dq}{dh}$

$$A\,q\frac{dq}{dh}+B\,h^{-1/4}q+C\,h^{-1/4}=0 \quad . . (5).$$

The differential equation of this type will be solved by the graphical and the numerical method as shown in the book edited by N. W. McLachlan [2].

We can write many different q–h curves for the given different values of dq/dh, and we can choose the solution of the equation of (5) by the given boundary conditions..

The film condensation of steam on the definite horizontal plane was investigated theoretically by S. Takatama [3]. The author wish to express many thanks to Mr. S. Takatama, who is the author of the most useful paper for writing this paper.

References

[1] W. Nusselt, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. Band 60, Nr. 27, Sonnabend, den 1. Juli 1916, S. 541—546.

[2] N. W. McLachlan, Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences. 1950, P. 145, Chapter 8. Oxford at the Clarendon Press.

[3] S. Takatama, On the Condensation of Saturated Steam on the Horizontal Plate. Engineering (Printed by Japanese in Osaka P. 150—152. Vol. 37, No. 5, 1950.

Verfasser: Prof. Dr. Syogo Matsunaga, Bridge Stone Tyre Co. Ltd. (Department of Tyre Design), Kyo-machi 105, Kurume-city, Fukuoka-Pref. (Japan)

Elementarer Beweis für die Produktentwicklung des Sinus und die Partialbruchzerlegung des Cotangens

1. Wir stützen uns im folgenden auf die elementaren Ungleichungen und Formeln:

$$\left.\begin{aligned}&1<\frac{x_1}{\sin x_1}<\frac{x_2}{\sin x_2}\le\frac{\pi}{2} &&\text{für } 0<x_1<x_2\le\frac{\pi}{2},\\ &1=\lim\frac{x}{\sin x} &&\text{für } x\to 0\ (x\ne 0)\end{aligned}\right\} \quad (1);$$

$$1\ge\cos x\ge\frac{1}{2} \qquad \text{für } 0\le x\le\frac{\pi}{3} \quad . . . (2);$$

$$\frac{1}{2p}<\sum\frac{1}{\nu^2}<\frac{1}{p-1} \qquad p\le\nu\le q \quad . . . . (3),$$

p, q natürlich; $2\le p$, $q\ge 2p-1$ (denn es ist z. B. für den angegebenen Zeigerbereich

$$\sum\frac{1}{\nu^2}>\sum\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\sum\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$
$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{q-1}\ge\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}=\frac{1}{2p};$$

$$e^{-2x}\le 1-x\le e^{-x} \quad \text{für } 0\le x\le\frac{1}{2} \quad (4);$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\pi\pm\alpha}{2} \quad (5);$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} \quad . . . . . (6).$$

2. (5) mit dem $+$-Zeichen rechts ergibt für $\alpha=\pi x$

$$\sin\pi x=2\sin\pi\cdot\frac{x}{2}\cdot\sin\pi\frac{x+1}{2} \quad . . (7).$$

(7) auf jeden Faktor rechts angewendet, liefert

$$\sin\pi x=2^3\sin\pi\frac{x}{2^2}\cdot\sin\pi\frac{x+1}{2^2}$$
$$\times\sin\pi\frac{x+2}{2^2}\cdot\sin\pi\frac{x+3}{2^2};$$

Wiederholung dieser Umformung ergibt nach $(n-2)$ weiteren Schritten

$$\sin\pi x=2^{2^n-1}\prod_{\nu}^{0,2^n-1}\sin\pi\frac{x+\nu}{2}.$$

Bis auf den Faktor π fungieren rechts die Argumente

$\frac{x}{2^n}$	$\frac{x+\nu}{2^n}$	$\frac{x+2^{n-1}}{2^n}$ $\frac{x+2^n-\nu}{2^n}$
	$\nu=1,2,\dots 2^{n-1}-1$	$\nu=1,2,\dots,2^{n-1}-1.$

Es ist

$$\sin\pi\frac{(x+2^n)-\nu}{2^n}=\sin\pi\frac{\nu-x}{2^n},$$

ferner

$$\sin\pi\frac{x}{2^n}\cdot\sin\pi\frac{x+2^{n-1}}{2^n}$$
$$=\sin\pi\frac{x}{2^n}\cdot\cos\pi\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\pi\frac{x}{2^{n-1}}.$$

Mithin:

$$\sin\pi x$$
$$=2^{2^n-1}\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2^{n-1}}\prod_{\nu}^{1,2^{n-1}-1}\left\{\sin\frac{\pi(\nu+x)}{2^n}\cdot\sin\frac{\pi(\nu-x)}{2^n}\right\}.$$

Die $\{\}$ darin ist nach (6)

$$\{\}=\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}-\sin^2\frac{\pi x}{2^n}=\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}\right\},$$

also

$$\sin\pi x=2^{2^n-1}$$
$$\times\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2^{n-1}}\prod_{\nu}^{1,2^{n-1}-1}\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}\prod_{\nu}^{1,2^{n-1}-1}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}\right\} (8).$$

Nimmt man (8) für $0<x<1$ und dividiert beide Seiten durch x, so liefert der Limes $x\to 0$ nach (1)

$$2^n=2^{2n-1}\prod_{\nu}^{1,2^{n-1}-1}\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n},$$

wodurch sich (8) so schreibt:

$$\sin\pi x = 2^{n-1}\cdot\sin\frac{\pi x}{2^{n-1}}\cdot\prod_{\nu}^{1,\,2^{n-1}-1}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}\right\} \quad (9).$$

Führt man rechts gliedweise den Limes $x\to 0$ aus, so entsteht das unendliche Produkt

$$\pi x\prod_{\nu}^{1,\,\infty}\left[1-\frac{x^2}{\nu^2}\right].$$

Wir setzen

$$P_k(x)=\pi x\prod_{\nu}^{1,\,k}\left[1-\frac{x^2}{\nu^2}\right] \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Sei jetzt $x\neq$ ganze Zahl und k_0 so gewählt, daß

$$\frac{\frac{\pi}{2}|x|}{k_0+1}<\frac{1}{2},\qquad k_0>2 \quad \ldots\ldots (10);$$

ferner seien im folgenden k, n beliebig, jedoch so, daß $k\geq k_0$ und $2^{n-1}-1\geq 2(k+1)-1$, also $n\geq 5$ (11) ist, und schließlich sei

$$\overset{(n)}{P}_k(x)=2^{n-1}\cdot\sin\frac{\pi x}{2^{n-1}}\prod_{\nu}^{1,\,k}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}\right\}$$

$$\overset{(n)}{p}_k(x)=\prod_{\mu}^{k+1,\,2^{n-1}-1}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\mu}{2^n}}\right\}.$$

Dann ist

$$\frac{P_k(x)}{\sin\pi x}=\frac{P_k(x)}{\overset{(n)}{P}_k(x)}\cdot\frac{1}{\overset{(n)}{p}_k(x)}.$$

Wir schätzen $\overset{(n)}{p}_k(x)$ nach oben und unten ab.

Wegen (10) und (1) ist

$$\frac{\left|\sin\frac{\pi x}{2^n}\right|}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}}>\frac{\frac{\pi|x|}{2^n}}{\frac{\pi\mu}{2^n}}=\frac{|x|}{\mu}\quad\ldots\ldots (12),$$

$$\frac{\left|\sin\frac{\pi x}{2^n}\right|}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}}<\frac{\frac{\pi|x|}{2^n}}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}}=\frac{|x|}{\mu}\,\frac{\frac{\pi\mu}{2^n}}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}}<\frac{|x|}{\mu}\,\frac{\pi}{2}\qquad (13),$$

und also wegen (4) und (5)

$$\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\mu}{2^n}}\right\}<1-\frac{x^2}{\mu^2}\leq e^{-x^2\frac{1}{\mu^2}}\quad\ldots\ldots (14),$$

$$\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\mu}{2^n}}\right\}>1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2}{\mu^2}\geq e^{-2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{1}{\mu^2}}\qquad (15),$$

mithin wegen (11)

$$\overset{(n)}{p}_k(x)<e^{-x^2\sum\limits_{\mu}^{k+1,\,2^{n-1}-1}\frac{1}{\mu^2}}<e^{-x^2\frac{1}{2(k+1)}}$$

$$\overset{(n)}{p}_k(x)>e^{-\frac{\pi^2}{2}x^2\sum\limits_{\mu}^{k+1,\,2^{n-1}-1}\frac{1}{\mu^2}}>e^{-\frac{\pi^2}{2}x^2\frac{1}{k}}.$$

Man hat also

$$e^{\frac{x^2}{2(k+1)}}\cdot\left[\frac{P_k(x)}{\overset{(n)}{P}_k(x)}\right]<\frac{P_k(x)}{\sin\pi x}<\left[\frac{P_k(x)}{\overset{(n)}{P}_k(x)}\right]\cdot e^{\frac{\pi^2x^2}{2k}}.$$

Führt man darin den Limes $n\to\infty$ aus, so wird lim [ ] = 1, und man erhält

$$e^{\frac{x^2}{2(k+1)}}\leq\frac{P_k(x)}{\sin\pi x}\leq e^{\frac{\pi^2x^2}{2k}}.$$

Der Limes $k\to\infty$ ergibt jetzt

$$\lim_{k\to\infty}\frac{P(x)}{\sin\pi x}=1\quad\text{oder}\quad\lim_{k\to\infty}P_k(x)=\sin\pi x,$$

also

$$\sin\pi x=\pi x\cdot\prod_{\nu}^{1,\,\infty}\left[1-\frac{x^2}{\nu^2}\right]\quad\ldots (16),$$

gültig für jedes $x\neq$ ganze Zahl; ist $x=$ ganze Zahl so ist die linke und die rechte Seite Null, so daß (16) für jedes x gilt.

3. Sei jetzt $0<x<1$. Dann darf man von (9) den Logarithmus nehmen, und die anschließende Differentiation liefert

$$\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi x=\frac{\cos\frac{\pi x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\pi x}{2^{n-1}}}\cdot\frac{\pi}{2^{n-1}}-\sum_{\nu}^{1,\,2^{n-1}-1}\frac{2\,\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi x}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}}\quad\ldots (17).$$

Führt man rechts den Limes $n\to\infty$ gliedweise aus, so ergibt sich die unendliche Reihe

$$\frac{1}{x}-\sum_{\nu}^{1,\,\infty}\frac{2x}{\nu^2-x^2}.$$

Wir setzen

$$S_k(x)=\frac{1}{x}-\sum_{\nu}^{1,\,k}\frac{2x}{\nu^2-x^2},$$

$$\overset{(n)}{S}_k(x)=\frac{\cos\frac{\pi x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\pi x}{2^{n-1}}}\cdot\frac{\pi}{2^{n-1}}-\sum_{\nu}^{1,\,k}\frac{2\,\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi x}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{2^n}}},$$

$$\overset{(n)}{s}_k(x)=-\sum_{\mu}^{k+1,\,2^{n-1}-1}\left[\frac{2\left\{\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi x}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\mu}{2^n}}\right\}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2^n}}{\sin^2\frac{\pi\mu}{2^n}}}\right] \quad (18)$$

Dann ist

$$S_k(x)-\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi x=\left[S_k(x)-\overset{(n)}{S}_k(x)\right]+\left(-\overset{(n)}{s}_k(x)\right)\quad (19).$$

Wir schätzen $-\overset{(k)}{s}_k(x)$ nach oben und unten ab. Für die { } in (18) ergibt sich wegen (12), (13), (1), (2) und (10) und (11):

$$\{\ \} = \frac{\sin\frac{\pi x}{2^n}}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}} \cdot \frac{\frac{\pi\mu}{2^n}}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}} \cos\frac{\pi x}{2^n} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$< \frac{\frac{\pi}{2}x}{\mu} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{\pi^2}{4}x}{\mu^2},$$

$$\{\ \} = \frac{\sin\frac{\pi x}{2^n}}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}} \cdot \frac{\frac{\pi\mu}{2^n}}{\sin\frac{\pi\mu}{2^n}} \cos\frac{\pi x}{2^n} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$> \frac{x}{\mu} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{1}{2}x}{\mu^2}.$$

Damit ergibt sich für den einzelnen Summanden [ ] in (18) die Abschätzung

$$[\ ] < \frac{\frac{\frac{\pi^2}{2}x}{\mu^2}}{1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2}{\mu^2}} = \frac{\frac{\pi^2}{2}x}{\mu^2-\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2} < \frac{\frac{\pi^2}{2}x}{(\mu-2)^2}$$

wegen

$$\mu^2-\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2 > \mu^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > (\mu-2)^2;$$

$$[\ ] > \frac{\frac{x}{\mu^2}}{1-\frac{x^2}{\mu^2}} = \frac{x}{\mu^2-x^2} > \frac{x}{\mu^2}.$$

Man bekommt wegen (3):

$$-\overset{(n)}{s}_k(x) < \frac{\pi^2}{2}x \sum_{\mu}^{k+1,\,2^{n-1}-1} \frac{1}{(\mu-2)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}x \sum_{\mu}^{k-1,\,2^{n-1}-3} \frac{1}{\mu^2} < \frac{\pi^2}{2}x\frac{1}{k-2},$$

$$-\overset{(n)}{s}_k(x) > x \cdot \sum_{\mu}^{k+1,\,2^{n-1}-1} \frac{1}{\mu^2} > x\,\frac{1}{2(k+1)},$$

und weiter aus (19)

$$\frac{x}{2}\frac{1}{k+1} < \begin{Bmatrix} S_k(x) - \pi\operatorname{ctg}\pi x \\ -[S_k(x) - \overset{(n)}{S}_k(x)] \end{Bmatrix} < \frac{\pi^2 x}{2}\frac{1}{k-2}.$$

Der Limes $n \to \infty$ liefert wegen $\lim [\ ] = 0$

$$\frac{x}{2}\frac{1}{k+1} \leq \{S_k(x) - \pi\operatorname{ctg}\pi x\} \leq \frac{\pi^2 x}{2}\frac{1}{k-2},$$

und der Limes $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty}\{S_k x) - \pi\operatorname{ctg}\pi x\} = 0 \quad\text{oder}\quad \lim_{k\to\infty} S_k(x) = \pi\operatorname{ctg}\pi x$$

d. h.

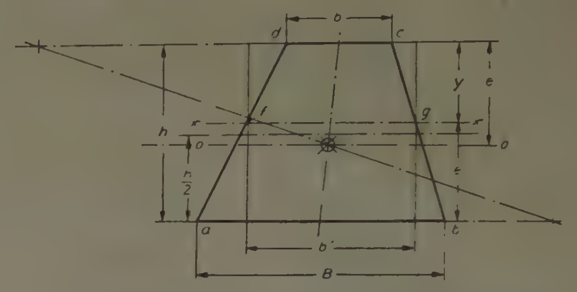
$$\pi\operatorname{ctg}\pi x = \frac{1}{x} + \sum_{\nu}^{1,\,\infty}\frac{2x}{x^2-\nu^2}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{\nu}^{1,\,\infty}\left[\frac{1}{x+\nu}+\frac{1}{x-\nu}\right] \quad . \; . \; . \; (20),$$

gültig für $0 < x < 1$. Ersetzt man rechts x durch $x+1$, so konvergiert — wie sofort zu sehen — die neue Reihe wieder, und zwar zum selben Limes, m. a. W. auch die rechte Seite hat, ebenso wie die linke, die Periode 1. Mithin gilt (20) für jedes $x \neq$ ganze Zahl.

Verfasser: Prof. Dr. E. Mohr, Berlin-Wannsee, Tristanstr. 1

Verfahren zur zeichnerischen Ermittlung des äquatorialen Trägheitsmomentes trapezförmiger Flächen



Das Trapez $abcd$ hat die Grundlinien b und B. Der Abstand e des Schwerpunktes wird in bekannter Weise bestimmt. Er liegt auf der Achse 0 — 0. Parallel zu ihr zieht man im Abstand e von $\overline{ab}$ die Linie x—x, die die Seiten $\overline{ad}$ und $\overline{bc}$ in den Punkten f und g schneidet. Die Strecke $\overline{fg} = b'$ ist die Grundlinie eines Rechtecks mit der Höhe h. Es wird bewiesen, daß das Trägheitsmoment J_R des Rechtecks, bezogen auf dessen Mittelachse gleich dem Trägheitsmoment J_T der Trapezfläche, bezogen auf dessen Schwerachse 0 — 0 ist. Aus der Zeichnung ergibt sich mit $B - b = b_1$

$$\frac{B-b}{h} = \frac{b_1}{h} = \frac{b'-b}{y}\,; \qquad b' = b + b_1\frac{y}{h} \quad (1).$$

Setzen wir für $y = h - e$ und für $e = \frac{1}{3}\frac{3b+2b_1}{2b+b_1}h$ (bekannte Formel) dann wird

$$b' = b + b_1\left(1-\frac{e}{h}\right) = b + b_1 - b_1\frac{3b+2b_1}{3(2b+b_1)}.$$

Umgeformt ergibt sich

$$b' = \frac{6b^2+6bb_1+b_1^2}{3(2b+b_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Dieser Wert in die Formel für J_R eingesetzt:

$$J_R = \frac{b'h^3}{12} = \frac{6b^2+6bb_1+b_1^2}{36(2b+b_1)}h^3 \quad . \; . \; (3).$$

Der rechte Teil der Gl. (3) ist aber die Formel für J_T. J_R bezogen auf die Mittelachse parallel $\overline{ab}$ ist also gleich J_T bezogen auf die Schwerachse 0 — 0.

Das zeichnerische Verfahren bietet zweifellos Vorteile. Das Maß b' läßt sich auf dem Reißbrett schnell mit genügender Genauigkeit bestimmen und hierauf $J_R = J_T$ ebenso schnell ausrechnen.

Verfasser: Karl Borth, Dresden A 29, Unkersdorfer Str. 10

Zur numerischen Integration periodischer Funktionen

In Z. angew. Math. Mech. 36 bemerkte W. Lohmann [1] folgende Eigenschaft periodischer Funktionen: Integriert man eine genügend oft differenzierbare periodische Funktion $f(x) = f(x+p)$ über eine volle Periode p numerisch, so kann man bei Anwendung der Rechteckregel den dabei entstehenden Fehler mit einer Fehlerabschätzung der Simpsonregel abschätzen.

Hier soll gezeigt werden, daß die Rechteckregel, angewandt zur numerischen Integration periodischer Funktionen, im allgemeinen noch wesentlich schärfere Fehlerabschätzungen erlaubt.

In diesem Zusammenhang sei zunächst auf ein Lemma zur numerischen Integration einer periodischen Funktion von G. Birkhoff, D. M. Young und E. H. Zarantonello [2] hingewiesen, das aussagt: Sei $F(q)$ eine periodische Funktion der Periode 2π, so werde das Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ durch die Punkte $q_1, q_2, \ldots, q_N$ in N gleiche Teilintervalle unterteilt. Dann ist die Trapezregel

$$\int_0^{2\pi} F(q)\,dq \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} F(q_k)\,\Delta q_k$$

eine „bestmögliche".

„Bestmöglich" ist hier in folgendem Sinne zu verstehen: Führt man die numerische Integration mit Hilfe einer beliebigen Quadraturformel

$$\int_0^{2\pi} F(q)\,dq \approx \sum_{k=0}^{N} \alpha_k F(q_k)\,, \quad F(q_0) = F(q_N)\,,$$

N-mal durch, wobei als Anfangspunkte die Teilpunkte $q_1, q_2, \ldots q_N$ genommen werden, dann ist der Mittelwert der so erhaltenen bestimmten Integrale mit einem Fehler behaftet, der das arithmetische Mittel der bei den N Integrationen entstehenden Einzelfehler ist. Der Fehler bei Verwendung der Rechteckregel ist ebenfalls gleich dem arithmetischen Mittel der Fehler, die bei N-maliger Verwendung einer $(N+1)$-Punkteregel entstehen. Dazu wird lediglich die Tatsache benötigt, daß $\Sigma\,\alpha_k = 2\pi$ ist, eine Forderung, die ja nur besagt, daß die Funktion $F(q) = 1$ exakt integriert wird. Der Beweis dieses Lemmas verläuft analog wie die im folgenden zu zeigende Erweiterung.

Unsere weiteren Betrachtungen beziehen sich auf solche Abschätzungen des Fehlers R einer Quadraturformel $\Sigma\,\alpha_k F(q_k)$, die von der Form

$$|R| \leq C \operatorname{Max} |\Phi(F)|$$

sind; die bekanntesten Fehlerabschätzungen gehören zu dieser Klasse. Dabei ist das lineare Funktional $\Phi(F)$ etwa

$$\Phi(F) = \frac{d^\nu F}{dq^\nu} \qquad 1 \leq \nu \leq N+1$$

oder (Ph. Davis [3])

$$\Phi(F) = F\,.$$

Im letzteren Fall ist F in einem geeigneten Gebiet zu betrachten, in das die Funktion F analytisch fortgesetzt wird.

Sind nun $R^{(l)}$ die Fehler der bei q_l beginnenden numerischen Integration, so ist

$$\left|\frac{1}{N}\sum R^{(l)}\right| \leq \frac{1}{N}\sum_1^N |R^{(l)}| \leq \operatorname{Max} |R^{(l)}| \leq C \operatorname{Max} |\Phi(F)$$

die Abschätzung des arithmetischen Mittels der Fehler bei Verwendung einer $(N+1)$-Punkteregel, und für die Einzelfehler gilt ebenfalls

$$|R^{(l)}| \leq C \operatorname{Max} |\Phi(F)|\,.$$

Nach dem genannten Lemma gilt dieselbe Abschätzung auch für den Fehler bei Verwendung der Rechteckregel.

Deshalb enthält dieses Lemma auch die folgende Feststellung: Die Rechteckregel — die ja bei der Integration einer periodischen Funktion mit der Trapezregel identisch ist — bringt einen Fehler mit sich, der mit derjenigen Fehlerabschätzung abgeschätzt werden kann, die für eine beliebige Quadraturformel der Gestalt

$$\int_0^{2\pi} F(q)\,dq \approx \sum_1^N \alpha_k F(q_k)$$

gilt.

Die Aussage von W. Lohmann ist für $N = 2$ hierin enthalten. Für $N > 2$ besagt die obige Aussage mehr, da die Fehlerabschätzung einer $(N+1)$-Punkteregel im allgemeinen engere Schranken liefern wird als die der Simpsonregel.

Es ist jedoch möglich, hier eine weitergehende Aussage zu gewinnen, die im allgemeinen noch engere Schranken liefern wird. Betrachten wir nämlich auch Quadraturformeln Hermitescher Art, die neben den Funktionswerten an den Stützstellen auch die Ableitungen heranziehen, also von der Form

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+p} f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} a_k\, f\!\left(x_0 + k\frac{p}{n}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} a_k'\, f'\!\left(x_0 + k\frac{p}{n}\right) + R_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_k f_k + a_k' f_k') + R_n\end{aligned}$$

sind; dabei ist $R_n = C(n)\,\Phi(f)$.

Dann wird

$$\begin{aligned}I = \int_{x_0}^{x_0+p} f(x)\,dx &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n \\ &\quad + a_1' f_1' + a_2' f_2' + \cdots + a_n' f_n' + R_n^{(1)}\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I = \int_{x_0+\frac{p}{n}}^{x_0+\frac{n+1}{n}p} f(x)\,dx &= a_n f_1 + a_1 f_2 + \cdots a_{n-1} f_n \\ &\quad + a_n' f_1' + a_1' f_2' + \cdots + a_{n-1}' f_n' + R_n^{(2)}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}I = \int_{x_0+\frac{n-1}{n}p}^{x_0+\frac{2n-1}{n}p} f(x)\,dx &= a_2 f_1 + a_3 f_2 + \cdots + a_1 f_n \\ &\quad + a_2' f_1' + a_3' f_2' + \cdots + a_1' f_n' + R_n^{(n)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n\,I &= f_1\,\Sigma\,a_k + f_2\,\Sigma\,a_k + \cdots + f_n\,\Sigma\,a_k + f_1'\,\Sigma\,a_k' \\ &\quad + \cdots + f_n'\,\Sigma\,a_k' + \sum_k R_n^{(k)}\end{aligned}$$

$$n\,I = \Sigma\,f_k\,\Sigma\,a_k + \Sigma\,f_k'\,\Sigma\,a_k' + \sum_k R_n^{(k)} \qquad (*).$$

Ebenso wie man von einer linearen Quadraturformel der Gestalt

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx \sum_0^n \alpha_k\,\varphi_k$$

mindestens verlangt, daß sie die Funktion $\varphi(x) = c$ exakt integriert, soll eine Formel

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx \sum_0^n (\alpha_k\,\varphi_k + \alpha_k'\,\varphi_k')$$

mindestens den Wert des Integrals über

$$\varphi(x) = c_1 + c_2\,x$$

exakt liefern.

Daraus folgt zunächst wieder, wenn wir der Einfachheit halber $a = 0$ annehmen, $\Sigma\,\alpha_k = b$.

Es ist

$$\int_0^b (c_1 + c_2\,x)\,dx = c_1\,b + c_2\,\frac{b^2}{2}$$

und

$$Q = \sum_0^n (\alpha_k \varphi_k + \alpha_k' \varphi_k')$$

$$= c_1 \sum_0^n \alpha_k + \frac{c_2 b}{n} \{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1} + n\alpha_n\}$$

$$+ c_2 \sum_0^n \alpha_n' .$$

Wir machen nun Gebrauch von der Eigenschaft, daß in einer Quadraturformel allgemeiner Art die Funktionswerte mit symmetrischen Gewichten versehen sind, also $\alpha_l = \alpha_{n-l}$ ist. Dann ist

$$Q = c_1 b + c_2 \sum_0^n \alpha_k'$$

$$+ \frac{c_2 b}{n} \left\{ \frac{n}{2} \alpha_n + \frac{n}{2} \alpha_{n-1} + \cdots + \frac{n}{2} \alpha_1 + \frac{n}{2} \alpha_0 \right\}$$

$$= c_1 b + c_2 \sum_0^n \alpha_k' + \frac{c_2 b}{n} \frac{n}{2} \sum_0^n \alpha_k$$

$$= c_1 b + \frac{c_2 b^2}{2} + c_2 \sum_0^n \alpha_k' .$$

Daraus folgt $\Sigma \alpha_k' = 0$, und wir erhalten aus (*)

$$n\, I = p \sum_k f_k + \sum_k R_n^{(k)} ,$$

$$I = \frac{p}{n} \sum_k f_k + \frac{1}{n} \sum_k R_n^{(k)} .$$

Nun ist $R_n^{(k)} = C(n)\, \Phi(f)$

$$|R_n^{(k)}| \leqq |C(n)| \operatorname{Max} |\Phi(f)|$$

und

$$I = \frac{p}{n} \sum_k f_k + \bar{R}_n$$

mit

$$|\bar{R}_n| \leqq C(n)\, |\operatorname{Max} |\Phi(f)|\, ;$$

hier ist etwa

$$\Phi(f) = \frac{d^{2n+2} f}{dx^{2n+2}} .$$

Das ist aber die Rechteckregel mit der Fehlerabschätzung einer Hermiteschen Quadraturformel für $(n + 1)$ Stützstellen.

Ergebnis: Integriert man eine periodische Funktion $f(x) = f(x + p)$ über eine volle Periodenlänge p mit der Rechteckregel unter Verwendung der Funktionswerte an n äquidistanten Stützstellen, so kann man den dabei entstehenden Fehler mit derjenigen Fehlerabschätzung abschätzen, die bei Verwendung einer Hermiteschen Quadraturformel mit $(n + 1)$ Stützstellen gilt. Die Aussage bezieht sich dabei auf solche allgemeinen Hermiteschen $(n + 1)$-Punkteregeln, in denen die Gewichte der Funktionswerte symmetrisch zur Intervallmitte sind.

Es ist der besonderen Bemerkung wert, daß damit freilich nicht ausgesagt wird, die Rechteckregel liefere durchweg ebenso genaue Ergebnisse wie eine Quadraturformel höheren Approximationsgrades. Die höhere Genauigkeit einer solchen Formel ist aber deshalb nur von beschränktem Nutzen, weil keine genaueren Fehlerschranken als bei der Rechteckregel zur Verfügung stehen.

Literatur

[1] W. Lohmann, Numerische Auswertung von Integralen über eine volle Periode von periodischen Integrandenfunktionen mit der „Rechteckregel". Z. angew. Math. Mech. 36 (1956), S. 464 bis 465.

[2] G. Birkhoff, D. M. Young and E. H. Zarantonello, Numerical methods in conformal mapping, Proc. of Symp. in Appl. Math. IV, Fluid Dynamics, McGraw-Hill Book Comp. Inc., New York 1953, p. 117—140.

[3] Ph. Davis, Errors of Numerical Approximations for Analytic Functions, Journ. Rat. Mech. Anal. 2 (1953), p. 303—313.

Verfasser: Dr. Günther Hämmerlin, Karlsruhe-Rüpurr, Fronstr. 15

Zur Identität von Gleitlinien und Charakteristiken

Es interessiere hier eine durch eine Mohrsche Hüllkurve gegebene Plastizitätsbedingung

$$\tau_n = k + \sigma_n \operatorname{tg} \varrho ,$$

bei der Kohäsion k und Gleitwinkel ϱ sich in Abhängigkeit von der Schubspannung ändern. Die Tangenten an die Hüllkurve sind dann gegeben durch

$$\tau_n^* = k + \sigma_n^* \operatorname{tg} \varrho ,$$

wobei

$$k = \mathfrak{K}(\tau_n) , \quad \varrho = \mathfrak{R}(\tau_n) .$$

Funktionen der Schubspannung τ_n im Berührungspunkt von Tangente und Mohrscher Hüllkurve sind. Bedeutet ein beigefügter Strich die Ableitung nach dem Argument, so lautet die Parameterdarstellung der Mohrschen Hüllkurve:

$$\sigma_n = -\frac{k' \cos^2 \varrho}{\varrho'} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

mit der Identität

$$\tau_n = k - \frac{k' \sin \varrho \cos \varrho}{\varrho'} \quad \ldots\ldots \quad (1\mathrm{a}).$$

Bezeichnet man nun die unter den Winkeln $\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}$ gegen die größte Hauptspannung gerichteten Kurven als Gleitlinien, so lautet mit $k_1 = k \operatorname{cotg} \varrho$ und

$$K = \int k\, d\, (\ln k_1) ,$$

sowie

$$\bar{\upsilon} = \varrho' \sigma , \qquad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + k_1$$

die Bedingung dafür, daß die Gleitlinien mit den Charakteristiken des auf sie bezogenen Systems der Gleichgewichtsbedingungen identisch sind[1]):

$$\mathfrak{K} \equiv K' + \bar{\upsilon} = 0 .$$

Daß diese Bedingung stets erfüllt ist, sieht man ein, wenn man sie in der Form schreibt

$$k_1' \operatorname{tg} \varrho = -\varrho' \sigma$$

oder

$$k' + \left(\sigma - \frac{k}{\sin \varrho \cos \varrho}\right) \varrho' = \sigma \quad \ldots \quad (2).$$

Aus

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sigma \sin \varrho$$

und

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \varrho$$

folgt

$$\sigma = \frac{\tau_n}{\sin \varrho \cos \varrho} ,$$

womit (2) in die Gleichung (1a) übergeht, also stets erfüllt ist.

Aus (2) entnimmt man, daß bei Auffassung von k als Funktion von ϱ längs der Hüllkurve zu festem ϱ die halbe Spannungssumme

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = k \operatorname{tg} \varrho - \frac{dk}{d\varrho}$$

gehört.

---

[1]) H. Schlechtweg, Z. angew. Math. Mech. 38 (1958), S. 139/148.

Verfasser: Prof. Dr. H. Schlechtweg, Kettwig/Ruhr, Brederbachstr. 13

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. A. Weigand, Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen. Band II. 176 S. m. 123 Abb. Berlin 1958. VEB Verlag Technik. Preis 21,— DM.

Der nunmehr vorliegende zweite Band enthält die Berechnung der Schwingungen von mechanischen Systemen mit zwei und n Freiheitsgraden, wobei jeweils die freien ungedämpften und gedämpften, die erzwungenen Schwingungen und Einschaltvorgänge sehr sorgfältig, und durch klare Abbildungen illustriert, behandelt werden. Bei der Berechnung des Einschwingvorganges wird von der *Laplace*-Transformation Gebrauch gemacht.

Freiberg/Sa. D. Rüdiger

Dr. W. Macke (Prof. a. d. TH Dresden), Wellen. Ein Lehrbuch der theoretischen Physik. XII + 465 S. m. 160 Abb. Leipzig 1958. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. Preis geb. 29,50 DM.

Das Buch eröffnet, wie der Verfasser ankündigt, eine Lehrbuchreihe über theoretische Physik, der eine vom bisherigen Gebrauch völlig abweichende Einteilung des Lehrstoffes zugrundeliegt. Während die meisten Lehrbücher die auf der Sinneswahrnehmung beruhende, klassische Einteilung der Physik in Mechanik, Akustik usw. bevorzugen, bilden hier gewisse, für den gegenwärtigen Erkenntnisstand grundlegende Begriffe, wie etwa der Wellenbegriff das ordnende Prinzip.

Es zeigt sich, daß die Verwendung des in der Wellengleichung formulierten Wellenbegriffes als Leitmotiv eine sehr vorteilhafte Methode darstellt. Sie erleichtert das Eindringen in die Fülle des Stoffes und fördert die Übersicht über den Zusammenhang zahlreicher Gebiete der Physik, die nach klassischer Auffassung weit auseinanderliegen.

Während sich der Anfänger bisher die Wellengleichung praktisch mehrmals aneignen mußte, je nachdem in welchem phänomenologischen Gewande sie auftrat, wird er hier einmal gründlich mit ihr vertraut. Er wächst gleichsam in den Formalismus hinein, der hier das Wesentliche ist und später in der Erinnerung das Bleibende sein wird. Das aber braucht gerade der künftige Experimentator.

Mancher reizvolle Gedankengang könnte für den Aufbau der Vorlesung in Experimentalphysik Anregungen geben.

In den ersten 3 Kapiteln geht zunächst, beginnend beim anschaulichen Beispiel des harmonischen Oszillators, der Ausbau des mechanischen Modells und die Erweiterung der Theorie Hand in Hand. Es folgen Kapitel über skalare Wellen (Akustik), wobei u. a. die Beugung ausführlich behandelt wird, und über Strahlen als Grenzfall kurzer Wellen, u. a. mit der Theorie der Abbildung. Danach schafft eine Ergänzung des mathematischen Rüstzeuges die Grundlage für die Behandlung transversaler (elektromagnetischer) Wellen sowie der Lichtausbreitung in Materie.

Die Wellenausbreitung im bewegten Koordinatensystem erfordert weiter die Darstellung der speziellen Relativitätstheorie. Schließlich wird im letzten Kapitel nach Einführung der vierdimensionalen Vektorrechnung in einer systematischen Wellentheorie dem Leser eine Vorstellung von der Tragweite der Theorie vermittelt.

Zahlreiche Übungsaufgaben zu allen Abschnitten ergänzen und vertiefen den Stoff.

Nach der Lektüre dieses Buches erwartet man mit Spannung die angekündigten weiteren Bände der Reihe über Teilchen, Quanten, Felder, Statistik, Relativität.

Dresden H. Zimmer

I. N. Bronstein und **K. A. Semendjajew,** Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen. XII + 548 S. m. 427 Abb. Leipzig 1958. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. in Plastikfolie 22,50 DM.

Es ist außerordentlich begrüßenswert, daß der Verlag sich der Mühe unterzogen hat, das bekannte Taschenbuch der Mathematik in deutscher Übersetzung herauszubringen. Es wird damit eine große Lücke im deutsch-sprachigen Schrifttum ausgefüllt. Das Taschenbuch überrascht den Leser durch die Fülle des auf relativ kleinem Raum gebotenen Stoffes. Die Darstellung ist für ein Taschenbuch sehr günstig gewählt, denn neben einer übersichtlichen leicht verständlichen Textgestaltung erleichtern zahlreiche sorgfältig ausgewählt Beispiele sowie einwandfreie Abbildungen das Verständnis sehr.

Um einen Überblick über die behandelten Stoffgebiete zu vermitteln, sollen zunächst die Hauptteile des Buches angeführt werden:

Teil 1, Tabellen und Kurven. Teil 2, Elementarmathematik (Näherungsrechnung, Algebra, Geometrie Trigonometrie). Teil 3, Analytische Geometrie und Differentialgeometrie. Teil 4, Grundzüge der Analysis (Differentialrechnung, Integralrechnung, Differentialgleichungen). Teil 5, Ergänzende Kapitel der Analysis (komplexe Zahlen- und Funktionentheorie, Vektorrechnung, Fourierreihen, Variationsrechnung. Teil 6, Auswertung von Beobachtungsergebnissen (Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, empirische Formeln und Interpolation). Es wird also der Stoff vermittelt, der von Ingenieuren und Ingenieurstudenten der technischen Hochschulen sowohl beim Studium wie auch in der praktischen Arbeit benötigt wird, wobei natürlich weit mehr Stoff geboten wird als in den mathematischen Vorlesungen für Ingenieure an technischen Hochschulen im allgemeinen gebracht wird. Der Auffassung der Verlagsgesellschaft B. G. Teubner, daß das Buch auch für Physiker und Mathematiker, die häufig mit numerischen Rechnungen zu tun haben, ein brauchbares Nachschlagewerk darstellt, kann sich der Referent nicht voll anschließen, da vor allem die mathematischen Grundlagen und Zusammenhänge erörtert werden, dagegen auf rein numerische Methoden nur in einigen Abschnitten eingegangen wird.

Besonders hervorzuheben sind die umfangreichen und zweckmäßig ausgesuchten Tabellen das Werkes. So findet man Tabellen der Zylinder- und Kugelfunktionen sowie elliptischer Integrale. Im Abschnitt „Integralrechnung" befinden sich Integraltafeln von 515 unbestimmten und 45 bestimmten Integralen. Es wäre jedoch begrüßenswert, wenn die Tabellen für Quadrate Kubikzahlen usw. (S. 3—21) in der Stellenzahl erweitert würden, was drucktechnisch keinerlei Schwierigkeiten bereiten dürfte.

Warum der Verlag glaubte, das Werk in der deutschen Ausgabe durch ein Kapitel über Variationsrechnung vervollständigen zu müssen, ist nicht einzusehen. Mit der gleichen Berechtigung hätte ein Abschnitt über Integralgleichungen oder, um den Belangen der praktischen Mathematik mehr Rechnung zu tragen, ein Abschnitt über Nomographie oder dergleichen eingefügt werden können. Für eine weitere Auflage wäre es wünschenswert, wenn das Literaturverzeichnis erweitert und das Sachregister noch stärker der deutschen Terminologie angepaßt würde. So findet man etwa im Sachregister das Stichwort „Additionstheorem" nicht. Ferner wäre es günstig, wenn man z. B. die Bezeichnung der Begriffe „sinusoidal" und „solenoidales Vektorfeld" ändert. Die Anmerkung auf Seite 252 dürfte für die vorliegenden mathematischen Zwecke überflüssig sein. Die Definition der unendlich kleinen Größen auf Seite 239 ist unklar übersetzt.

Doch sollen diese Einwände den Gesamteindruck des Werkes in keiner Weise schmälern. Das Buch kann vor allem Ingenieuren und Ingenieurstudenten empfohlen werden. Dem Verlag gebührt Dank für die sonst gute Ausstattung des Werkes.

Dresden H. Adler

Dr. R. Sauer (o. Prof. f. Mathematik u. anal. Mechanik a. d. TH München), Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LXII). Zweite erweiterte Auflage. XVI + 284 S. m. 68 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958. Springer-Verlag. Preis geb. 41,— DM.

Der Inhalt der ersten Auflage des bekannten Buches über Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen vom hyperpolischenTypus wurde im wesentlichen unverändert (hinzugekommen ist u. a. ein Abschnitt über Differentialgleichungen vom gemischten Typus) in die vorliegende zweite erweiterte Auflage übernommen. Neu hinzugefügt wurde ein fast 50 Seiten langes Kapitel, in dem im Anschluß an eine bekannte Arbeit von F. Penzlin die Theorie der Distributionen (in der Darstellung von H. König) zur Behandlung von Anfangswertproblemen herangezogen wird. Der Abschnitt geht in seinen ersten beiden Paragraphen zunächst auf die Grundlagen des Kalküls ein (Distributionen und ihre Ableitungen, Konvergenz von Folgen von Distributionen usw.) und auf die damit in sehr durchsichtiger Weise mögliche Behandlung von Sprungfunktionen (Riesz-Distributionen, Beziehungen zur Hadamardschen Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode usw.). Nach einem weiteren Paragraphen über Faltungsgleichungen, der insbesondere auch auf Anfangswertprobleme der Wellengleichung eingeht, wird der Kalkül auf wichtige Problemstellungen der dreidimensionalen Überschallströmung [Problem des flachen Körpers (Tragflügel), Problem des schlanken Körpers (drehsymmetrischer Rumpf)] angewandt. Abschließend wird die Erweiterung der Laplace-Transformation auf Distributionen und ihre Verwendung zur Lösung von Anfangswertproblemen dargelegt. Das schöne und vom Springer Verlag in gewohnter Weise vorzüglich ausgestattete Buch wird auch in seiner zweiten Auflage — nicht zuletzt wegen des sehr interessanten Kapitels über den Distributionskalkül — wieder viele Freunde finden.

Dresden M. Landsberg

Dr. K. Strubecker (o. Prof. d. Mathematik a. d. TH Karlsruhe), Vorlesungen über Darstellende Geometrie. (Mathematische Lehrbücher, Bd. 12) 324 S. m. 202 Abb. Göttingen 1958. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis geb. 16,80 DM.

Vorliegendes Buch ist aus langjährigen Vorlesungen des Autors über Darstellende Geometrie für Studierende der Mathematik und Physik, des Maschinenbaus und der Elektrotechnik sowie des Bauingenieurwesens und der Architektur an der TH Karlsruhe hervorgegangen. Das Werk ist eine hervorragende Einführung in die Grundlehren der Darstellenden Geometrie aus der Feder eines bedeutenden Fachmannes und Pädagogen. Der Verfasser bemüht sich dem Verständnis der Darstellenden Geometrie den Weg zu bereiten und den Leser durch diese hohe Schule des räumlichen Denkens zu führen. Dadurch sind eine gewisse Breite der Darstellung und gelegentliche Wiederholungen bedingt, die dem Lernenden aber das Erfassen des gebrachten Stoffes wesentlich erleichtern, insbesondere da alle Konstruktionen ausführlich begründet und genau beschrieben werden. Da der Verfasser auch analytische Verfahren und Betrachtungsweisen verwendet, wird dadurch der innere Zusammenhang der Darstellenden Geometrie und der Geometrie überhaupt mit den analytischen Disziplinen der Mathematik betont, ohne daß dadurch die anschaulich-geometrische Seite in den Hintergrund gedrängt würde. Die Sätze aus der Flächentheorie, die gelegentlich benötigt werden, sind im Schlußkapitel ohne Beweis, aber unter entsprechenden Literaturhinweisen zusammengestellt.

Nach einer kurzen Einleitung mit interessanten historischen Bemerkungen werden zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Parallelprojektion und der perspektiven Affinität besprochen und die Grundaufgaben der Lage und des Maßes im Grund- und Aufrißverfahren behandelt. Sodann werden ebenflächig begrenzte Körper betrachtet und beim ebenen Schnitt einer Pyramide die perspektive Kollineation eingeführt. Der nächste Abschnitt behandelt das Schrägrißverfahren, den Satz von *Pohlke* und die schiefe Axonometrie (Aufbau- und Schnellrißverfahren). Daran schließen sich ausführliche Betrachtungen gewisser krummer Flächen, wie vor allem von Kegeln, Zylindern und Kugeln. Nach einigen Sätzen über algebraische Kurven und Flächen werden Drehflächen (insbesondere 2. Ordnung) besprochen. Die Durchdringungskurven zweier Drehflächen werden stets punkt- und tangentenweise konstruiert, wobei auch auf das Aufsuchen der Scheitelkrümmungskreise Wert gelegt wird. Dann folgt ein Abschnitt über Schraublinien und Schraubflächen, wobei der von *Th. Schmid* eingeführte Begriff der Drehflucht verwendet wird. Eine Zusammenstellung der benötigten Sätze aus der Flächentheorie beschließt, wie bereits erwähnt, dieses ganz ausgezeichnete Lehrbuch, das gewiß dem Unterrichtsfach „Darstellende Geometrie" erneuten Auftrieb geben wird. Es ist nur zu hoffen, daß diesem Band bald ein zweiter folgen wird, in dem die hier noch nicht behandelten Gebiete der Darstellenden Geometrie wie z.B. normale Axonometrie, Perspektive usw. gebracht werden und in dem sich auch Hinweise über den Stoff der konstruktiven Übungen, getrennt nach den einzelnen Fachrichtungen, befinden, die ja unentbehrliche Ergänzungen der Vorlesungen darstellen.

Dresden R. Bereis

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

Nachrichten

1. Die wissenschaftliche Jahrestagung 1959 der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik findet in der Zeit vom 19.—23. Mai in Hannover unter der örtlichen Tagungsleitung von Herrn Prof. Dr. W. Quade statt.

2. In der Zeit vom 15.—20. Juni 1959 veranstaltet die UNESCO in Paris eine internationale Konferenz über Informationsverarbeitung.

3. An der Technischen Hochschule Dresden fand in der Zeit vom 5.—15. Januar 1959 im Institut für Maschinelle Rechentechnik unter Leitung von Prof. Dr.-Ing. Lehmann für die mathematischen Hochschullehrkräfte der DDR ein Lehrgang über Maschinelle Rechentechnik statt. Es schloß sich eine zweitägige Exkursion mit Besichtigung von einschlägigen Betrieben und Anlagen in Karl-Marx-Stadt, Jena und Ilmenau an.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr.-Ing. habil. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin W 8, Mohrenstraße 39; Fernsprecher: 20 03 86, Postscheckkonto: Berlin 350 21. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/39/1—2. Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,—. Zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer ZLN 5011 des Ministeriums für Kultur, Hauptverwaltung Verlagswesen. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer" Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.